Matrizen: inverse Matrizen, Drehmatrizen

Aufgabe 1.
Für welches der folgenden Paare von Matrizen A, B gilt, daß A und B invers zueinander sind?

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2,5 & -5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie die Inversen, falls dies möglich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.
Berechnen Sie zur folgenden Matrix A die inverse Matrix A^{-1} mit dem Verfahren von Gauß-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.
Zu jeder regulären n-reihigen Matrix A gibt es genau eine inverse Matrix A^{-1}. Es gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ik})^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

Hierbei ist A_{ik} das algebraische Komplement des Elementes a_{ik} in der Determinante $\det A$.

Berechnen Sie mit dieser Formel zur folgenden Matrix A die inverse Matrix A^{-1}, und überprüfen Sie das Ergebnis durch Multiplikation von A und A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.
Zeichnen Sie die Punkte $P_1 = (3|0)$, $P_2 = (3|2)$, $P_3 = (3|5)$ und $P_4 = (2|4)$ in ein Koordinatensystem ein. Berechnen Sie unter Verwendung einer Drehmatrix die Koordinaten der um 120° gedrehten Punkte, und zeichnen Sie diese ebenfalls in das Koordinatensystem ein.