

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1.

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) sei auf das folgende Lösungsschema transformiert:

1	0	0	4	-7	1
0	1	0	0	3	9
0	0	1	-3	5	-12
0	0	0	0	0	0

Wie lautet die Lösung \vec{x} des LGS? Welchen Rang hat das LGS? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge L ? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Aufgabe 2.

Lösen Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem nach dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 0 \\x - y - 2z &= 0 \\2x + 3y - 4z &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\-x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3 \\x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1\end{aligned}$$

mit dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe 4.

Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= 4 \\3x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 &= 5 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 3\end{aligned}$$

Aufgabe 5.

Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\2x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 18 \\-x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -10\end{aligned}$$

Aufgabe 6.

Zeigen Sie, daß das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, und bestimmen Sie diese nach der Cramerschen Regel.

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.

Untersuchen Sie, ob das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4 \\5x - 2z &= 0 \\2x + 2y + z &= 3\end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, und berechnen Sie diese gegebenenfalls mit der Cramer-Regel.

Aufgabe 8.

Für welche reellen Werte des Parameters λ besitzt das folgende homogene lineare Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{pmatrix} (2 + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$