

Partielle Ableitungen und Fehlerrechnung

Funktionen mehrerer Veränderlicher, partielle Ableitungen

- Beispiele: Funktionen mehrerer Veränderlicher.
- Geometrische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher.
- Schreibweisen

Menge aller reellen Zahlen: \mathbb{R}

Menge aller geordneten Paare (x, y) aus reellen Zahlen: \mathbb{R}^2

Menge aller Tripel (x, y, z) aus reellen Zahlen: \mathbb{R}^3

Menge aller n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) aus reellen Zahlen: \mathbb{R}^n

- Definition

Eine **reellwertige Funktion f von n reellen Veränderlichen** ordnet jedem Element (x_1, x_2, \dots, x_n) aus einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig eine reelle Zahl y zu,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Die Menge D heißt der Definitionsbereich der Funktion f .

Die Menge aller y , die von der Funktion angenommen werden, wenn die n -Tupel die gesamte Menge D durchlaufen, heißt der Wertebereich von f .

- Beispiele
- Definition (partielle Ableitung)

Es sei eine Funktion $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Veränderlichen gegeben. Als **partielle Ableitung** von f nach x_i bezeichnet man die Funktion, die dadurch entsteht, daß man alle Veränderlichen außer x_i konstant hält und die Funktion f , die dann nur noch die eine Variable x_i hat, nach x_i ableitet. Dabei werden die üblichen Regeln für das Differenzieren einer Funktion einer Veränderlichen verwendet.

Schreibweise:

$$y_{x_i} = f_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Beispiele
- Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen erster Ordnung bei einer Funktion von zwei Veränderlichen.

- Anmerkung: Wird eine Funktion mehrerer Veränderlicher mehrmals nacheinander partiell differenziert, entstehen partielle Ableitungen höherer Ordnung.
- Schreibweise: Wird die Funktion $u = f(x, y, z)$ zuerst nach x und dann nach z partiell abgeleitet, schreibt man

$$u_{xz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

Wird zweimal nacheinander partiell nach y differenziert, schreibt man

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

- Beispiele
- Anmerkung: Ist f beliebig oft partiell differenzierbar, dann ist bei gemischten partiellen Ableitungen das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge,

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}.$$

(Geringere Voraussetzungen: siehe Satz von Schwarz.)

- Definition (totales Differential)

Das **totale Differential** (vollständige Differential) einer Funktion mehrerer Veränderlicher $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist der lineare Differentialausdruck

$$\begin{aligned} dy &= \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i \\ &= f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned}$$

- Beispiele
- Geometrische Veranschaulichung.