Anwendungen der Integralrechnung

Uneigentliche Integrale, Flächeninhalt, Bogenlänge

- Bezeichnungen: Bei „eigentlichen“ Integralen ist der Integrationsbereich endlich und der Integrand beschränkt. Dieser Integralbegriff wird im folgenden erweitert. Dabei verwenden wir für (noch zu definierende) Integrale mit unendlichen Grenzen oder unbeschränkten Integranden den Begriff ***uneigentliche Integrale***.

- Beispiele: Uneigentliche Integrale mit

  1. unendlichen Grenzen,

  $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^\infty \cos(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^0 e^x\,dx,$$

  2. unbeschränktem Integranden,

  $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx,$$

  3. unendlichen Grenzen und unbeschränktem Integranden,

  $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx.$$

- Definition

  Die Funktion f sei auf $[a,\infty)$ definiert und integrierbar. Man setzt

  $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx,$$

  falls der Grenzwert mit endlichem Wert existiert. Das uneigentliche Integral heißt dann ***konvergent*** (ansonsten ***divergent***).

- Anmerkung: Entsprechend

  $$\int_{-\infty}^a \ldots = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a \ldots$$

  und

  $$\int_{-\infty}^\infty \ldots = \int_{-\infty}^a \ldots + \int_a^\infty \ldots = \lim_{s\to-\infty}\int_s^a \ldots + \lim_{t\to\infty}\int_a^t \ldots$$

- Beispiele

- Definition

  Die Funktion f sei auf $[a,b)$ definiert und integrierbar. Hat f einen Pol an der Stelle $x=b$, so setzt man

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\uparrow b}\int_a^t f(x)\,dx,$$

  falls der Grenzwert mit endlichem Wert existiert. Das uneigentliche Integral heißt dann ***konvergent*** (ansonsten ***divergent***).

- Anmerkung: Entsprechend bei einem Pol an a

  $$\int_a^b \ldots = \lim_{t\downarrow a}\int_t^b \ldots$$

  oder einem Pol an $x_0 \in (a,b)$

  $$\int_a^b \ldots = \lim_{s\uparrow x_0}\int_a^s \ldots + \lim_{t\downarrow x_0}\int_t^b \ldots$$

- Beispiele

- Anmerkung: Ist ein uneigentliches Integral konvergent, so ist der entsprechende Flächeninhalt endlich.

- ***Flächenberechnungen mit Integralen***

  Der Wert eines Integrals mit Integrand f ist gleich dem Flächeninhalt der durch die Integrationsgrenzen, die Kurve $y=f(x)$ und die x-Achse begrenzten Fläche. Bei unendlichen Grenzen ist die Fläche unendlich breit, bei unbeschränktem Integranden unendlich hoch.

  Die Integration liefert Flächeninhalte mit positivem Vorzeichen, wenn die Flächen oberhalb der x-Achse liegen, und mit negativem Vorzeichen für Flächen unterhalb der x-Achse. Will man alle Flächeninhalte mit positivem Vorzeichen haben, muß man zunächst den Integrationsbereich so zerlegen, daß man von Nullstelle bis Nullstelle integriert, und dann von den Integralen den Betrag bilden, bei denen die Kurvenstücke von $y=f(x)$ unterhalb der x-Achse liegen.

- Beispiele

- Satz

  Die Funktionen f_o und f_u seien integrierbar auf $[a,b]$. Es gelte

  $$f_o(x) \geq f_u(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

  Dann ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven $y=f_o(x)$ und $y=f_u(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ gleich

  $$\int_a^b (f_o(x)-f_u(x))\,dx.$$

- Anmerkung: Das gilt unabhängig von der Lage der beiden Kurven bezüglich der x-Achse.

- Beispiele

- ***Bogenlänge von Funktionskurven***

- Problemstellung: Die Bogenlänge einer Funktionskurve soll berechnet werden.

- Satz

  Auf dem Intervall $[a, b]$ sei die stetig differenzierbare Funktion $y = f(x)$ gegeben. Die Bogenlänge L der Funktionskurve ist

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

- Beweis

- Beispiele