Grundlagen der Integralrechnung

Numerische Integration

- Problemstellung: Der Wert des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

kann in vielen Fällen nicht mit einer Stammfunktion F gemäß

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

berechnet werden, weil F nicht mit elementaren Funktionen darstellbar ist, oder weil die Rechnung zu aufwendig wird. Anstelle des exakten Integralwertes bestimmt man dann eine ***Näherung*** und spricht von ***numerischer Integration***.

Unverzichtbar sind Näherungsverfahren bei der Berechnung von Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$, deren Integrand $f(x)$ nicht formelmäßig sondern durch tabellierte Werte gegeben ist. Solche Tabellenwerte bekommt man in der Praxis beispielsweise durch Messungen der Funktion f.

- Beispiele

- Rechteckregel

Anschaulich ist der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ein Flächeninhalt. Die einfachste Näherung für die betreffende Fläche ist ein Rechteck mit der Breite $b-a$ und einer möglichst „passenden“ Höhe, z.B. $f(a)$ oder $f(b)$. Dessen Flächeninhalt ist dann

$$R = (b-a)f(a) \qquad \text{oder} \qquad R = (b-a)f(b).$$

- Trapezregel

Eine bessere Näherung als mit der Höhe $f(a)$ oder $f(b)$ wird man in den meisten Fällen mit einer „mittlere Höhe“ $(f(a)+f(b))/2$ erhalten. Durch

$$T = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

bekommt man aber den Flächeninhalt eines Trapezes und nennt diese Näherungsformel daher ***Trapezregel***.

Geometrisch betrachtet wird bei der Trapezregel die Kurve der Funktion $f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ durch eine Sehne ersetzt und die Fläche zwischen dieser Sehne und der x-Achse berechnet.

- Summierte Regeln

  Genauere Ergebnisse erzielt man, wenn man das Integrationsintervall $[a, b]$ aufteilt, und die Näherungsregel auf jedem Teilintervall einzeln anwendet. Wird $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite

  $$h = \frac{b-a}{n}$$

  zerlegt, und werden die Teilpunkte durch

  $$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_n = a + nh = b$$

  bezeichnet, dann ist

  $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \Big(\text{Näherung auf dem Intervall } [x_{i-1}, x_i] \Big).$$

- Summierte Rechteckregel

  Durch mehrfache Anwendung der Rechteckregel bekommen wir

  $$\int_a^b f(x)\,dx \approx R(n),$$

  und $R(n)$ ist die ***summierte Rechteckregel***

  $$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_i) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right) . \end{aligned}$$

- Summierte Trapezregel

  Ausgehend von der Trapezregel ist

  $$\int_a^b f(x)\,dx \approx T(n)$$

  mit der ***summierten Trapezregel***

  $$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} h\, \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) . \end{aligned}$$

- Beispiele

- Kepler-Regel

  Bei der Rechteckregel wird anstelle der Funktionskurve von f ein waagrechtes Geradenstück genommen, bei der Trapezregel hingegen ein Geradenstück mit „passender“ Steigung.

  Also wird bei der Rechteckregel $p(x) = a_0$ und bei der Trapezregel $p(x) = a_0 + a_1 x$ als Näherungsfunktion für $f(x)$ verwendet.

  Wie kann man nun Näherungskurven bekommen, die sich noch besser an f anpassen, so daß die Flächen unter den Näherungskurven noch besser dem Wert des Integrals über f entsprechen?

  Naheliegend ist der Übergang zu $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, also die Verwendung einer Parabel anstelle einer Geraden.

  Eine Parabel ist durch drei Punkte festgelegt. Wir wählen eine Parabel so, daß sie an den Stellen $x = a$, $x = b$ und in der Mitte des Intervalls bei $x = (a+b)/2$ mit der Funktion f übereinstimmt. Man kann zeigen, daß der Flächeninhalt S zwischen dem Parabelbogen und der x-Achse von $x = a$ bis $x = b$ dann gleich

  $$S = (b-a)\,\frac{f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)}{6}$$

  ist, und nennt diese Formel ***Kepler-Regel***.

- Skizze

- Anmerkung: In der Trapezregel wird der Mittelwert zweier Funktionswerte gebildet. Entsprechend kann man den Bruch in der Kepler-Regel als gewichteten Mittelwert interpretieren.

- Summierte Kepler-Regel: Simpsonregel

  Wird die Kepler-Regel summiert, bekommt man die Integralnäherung

  $$\int_a^b f(x)\,dx \approx S(n),$$

  wobei $S(n)$ als ***Simpson-Regel*** bezeichnet wird. Es ist

  $$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n} h\,\frac{f(x_{i-1}) + 4f((x_{i-1}+x_i)/2) + f(x_i)}{6} \\ &= h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1}+h/2) + f(x_i)}{6} \\ &= \frac{b-a}{6n}\,\left(f(x_0) + 4f(x_0+h/2) + 2f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right) . \end{aligned}$$

- Beispiele