

Anwendungen der Differentialrechnung

Regel von de l'Hospital, Newton-Verfahren

- **Die Regel von de l'Hospital.**

- Problemstellung: Die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

sind gesucht. Grenzübergänge in Zähler und Nenner führen bei den Beispielen auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ bzw. „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

- Satz (**Regel von de l'Hospital**)

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von $x = a$ differenzierbar (nicht unbedingt in a selbst). Ferner sei $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $x = a$.

Für Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oder mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ohne Bew.)

- Anmerkung: Hierbei kann $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ oder $a = -\infty$ sein.
- Beispiele
- Anmerkung: Bei unbestimmten Ausdrücken vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\infty - \infty$ “, „ 0^0 “, „ 1^∞ “ und „ ∞^0 “ ist eine Rückführung auf „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ möglich.
- Beispiele
- **Das Newton-Verfahren.**
- Problemstellung: Gesucht sind die Lösungen einer Gleichung

$$f(x) = g(x).$$

Gleichwertig dazu ist die Bestimmung der Nullstellen der Funktion

$$y = f(x) - g(x).$$

In vielen Fällen ist es nicht möglich, die Lösungen der Gleichung bzw. die Nullstellen der Funktion mit Hilfe algebraischer Umformungen zu berechnen.

- Beispiel: Die Kurven $y = e^x$ und $y = -x$ schneiden sich. Also muß die Gleichung $e^x = -x$ eine Lösung haben. Gleichwertig formuliert heißt das, die Funktion $y = x + e^x$ muß bei demselben x -Wert eine Nullstelle besitzen.
- Skizze
- Ausweg: Die Aufgabenstellung wird nicht exakt gelöst; statt dessen sucht man **Näherungen**. Zum Beispiel kann man das Vorzeichen der Funktion $y = x + e^x$ für verschiedene x -Werte bestimmen und durch Intervallhalbierung die Nullstelle immer mehr eingrenzen. Solche Methoden heißen **numerische Verfahren** oder **numerische Algorithmen**. Für die Nullstellensuche ist das **Newton-Verfahren** sehr populär.
- Die Idee des Newton-Verfahrens.

Zur Funktion $f(x)$ ist die Nullstelle x^* gesucht (näherungsweise). Man wählt einen Startwert x_0 möglichst dicht bei x^* (abgeschätzt). An der Stelle x_0 wird die Funktion f linearisiert, indem die Tangente an die Funktionskurve gelegt und dann als Ersatz für f verwendet wird. Der Schnittpunkt x_1 der Tangente mit der x -Achse ist leicht zu berechnen und wird als Verbesserung von x_0 genommen. Dann geht es wieder von vorne los: an der Stelle x_1 wird die Tangente an f gelegt u.s.w.

Also werden die Näherungen x_0, x_1, x_2, \dots schrittweise (iterativ) verbessert. Man spricht von einem **Iterationsverfahren**. Für die Berechnung der x_n kann man eine Formel herleiten.

- Die **Iterationsvorschrift** des **Newton-Verfahrens**:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

- Skizze und Herleitung.
- Beispiel: $f(x) = x + e^x$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	-0.50000000000000000000000000000000	0.1065306597126334236037995
1	-0.5663110031972181530416491	0.0013045098060201101874254
2	-0.5671431650348622127865121	0.0000001964804717228820906
3	-0.5671432904097810286995766	0.000000000000000044574262753
4	-0.5671432904097838729999687	0.00000000000000000000000000000000

- Anmerkung: Das Newton-Verfahren muß nicht konvergieren. Selbst wenn es konvergiert, kann es einen falschen Wert liefern. Beim Arbeiten mit numerischen Verfahren ist Vorsicht geboten!