Grundlagen der Differentialrechnung

Kettenregel, Ableiten von Umkehrfunktionen

- Problemstellung: Ableitung einer Funktion der Gestalt $g(f(x))$, zum Beispiel $g(f(x)) = \sin(x^2)$. Hierbei ist $g(z) = \sin(z)$ und $z = f(x) = x^2$. Wir nennen g die *äußere Funktion* und f die *innere Funktion*.

- Satz (***Kettenregel***)

  Es seien f und g differenzierbar. (Genauer: $z = f(x)$ sei an der Stelle x differenzierbar und $y = g(z)$ an der dazugehörigen Stelle $z = f(x)$.)

  Dann ist auch $g(f(x))$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

  (ohne Bew.)

- Anmerkung:

  1. Wir nennen g' die *äußere Ableitung* und f' die *innere Ableitung*.
  2. Mit der Abkürzung $z = f(x)$ kann man schreiben:

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = \frac{d}{dz}\, g(z)\bigg|_{z=f(x)} \cdot \frac{d}{dx}\, f(x).$$

  3. Mit der Abkürzung $y = g(f(x))$ kann man die symbolische Regel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

     aufschreiben.

- Beispiele

- Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

  Die Funktion f sei auf dem Intervall (a, b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann existiert auf dem Bildbereich von (a, b) die Umkehrfunktion g zur Funktion f und ist dort differenzierbar mit

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

- Beweis
- Beispiele: Ableitungen von
  1. e-Funktion,
  2. Potenzfunktion mit beliebigem reellen Exponenten,
  3. Exponentialfunktion mit beliebiger Basis $b > 0$, $b \neq 1$,
  4. Logarithmusfunktion mit beliebiger Basis $b > 0$, $b \neq 1$,
  5. Arcusfunktionen.