

Matrizen

Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Rang einer Matrix, Drehmatrizen

- Definition

Ein Vektor \vec{v} heißt **Linearkombination** aus den n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, wenn gilt

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$$

mit reellen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- Beispiel

- Definition

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn sich einer dieser Vektoren als Linearkombination der restlichen $n - 1$ Vektoren darstellen läßt, ansonsten heißen sie **linear unabhängig**.

- Beispiele

- Satz

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt.

- Beweis

- Anmerkung: In dem quadratischen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist $\vec{0}$ eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A , d.h. es gilt

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ von A .

Die Determinante von A ist genau dann ungleich Null, wenn das LGS eindeutig lösbar ist, also nur die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$ hat, die Spaltenvektoren von A also linear unabhängig sind.

Beachten wir, daß die Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn die Determinante von A ungleich Null ist, so erhalten wir den folgenden Satz.

- Satz

Es sei A eine quadratische Matrix. A ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

- Anmerkung: Entsprechendes gilt mit den Zeilenvektoren, da $\det(A)$ genau dann ungleich Null ist, wenn $\det(A^T)$ ungleich Null ist.

- Satz

Der Rang eines beliebigen LGS (sowohl quadratisch als auch nichtquadratisch) ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned}\text{rg(LGS)} &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren} \\ &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.}\end{aligned}$$

(ohne Beweis)

- Definition

Der **Rang einer Matrix A** ist gleich dem Rang eines LGS mit der Koeffizientenmatrix A .

- Anmerkung: Somit ist der Rang einer Matrix gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

- Anmerkung: Für eine quadratische Matrix A sind also die Eigenschaften

- A ist invertierbar,
- $\det A \neq 0$,
- A ist regulär,
- die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig,
- die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig,
- der Rang von A ist maximal,
- $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung,
- $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar

gleichwertig.

- Drehmatrizen: Problemstellung.

In einem x - y -Koordinatensystem soll der Punkt $P = (x_1 | y_1)$ um den Winkel φ um den Ursprung gedreht werden; es entsteht dann der Punkt $Q = (x_2 | y_2)$.

Gegeben seien x_1 , y_1 und φ . Gesucht sind x_2 und y_2 .

- Skizze

- Satz

Für die Koordinaten von Q gilt:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\y_2 &= x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Mit einer ***Drehmatrix*** geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

- Beweis
- Anmerkung: Die Drehung um $\varphi = 0^\circ$ liefert die Einheitsmatrix. Die Drehung zurück, d.h. um den Winkel $-\varphi$ führt zur inversen Matrix. Die Drehung um einen Winkel α und dann um einen Winkel β ist gleich der Drehung um $\alpha + \beta$; das Produkt der Drehmatrizen für α und β ist die Drehmatrix für $\alpha + \beta$. Damit können die Additionstheoreme der Winkelfunktionen leicht hergeleitet werden.
- Satz (Additionstheoreme der Winkelfunktionen)

Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta).\end{aligned}$$

- Beweis