

Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Sätze, Cramer-Regel

- Satz

Zu einem LGS bezeichne m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten. Für beliebige LGS (sowohl $m = n$ als auch $m \neq n$) gilt:

inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$	homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$
Das LGS hat entweder 1. genau eine Lösung oder 2. unendlich viele Lösungen oder 3. keine Lösung.	Das LGS hat entweder 1. genau eine Lösung, $\vec{x} = \vec{0}$ oder 2. unendlich viele Lösungen, darunter ist $\vec{x} = \vec{0}$.

- Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar durch Interpretation des allgemeinen Lösungsschemas.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & & \\
 \vdots & & \ddots & \\
 0 & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c} k+1 \\ \vdots \\ k \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\
 \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{k,n} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \beta_1 \\
 \beta_2 \\
 \vdots \\
 \beta_k \\
 \hline
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c} k+1 \\ \vdots \\ m \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \beta_{k+1} \\
 \vdots \\
 \beta_m \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

- Anmerkung: Bei quadratischen LGS ($m = n$) haben wir die Besonderheit, daß zur Koeffizientenmatrix A die Determinante $\det A$ gebildet werden kann.

- Definition

Wir nennen eine quadratische Matrix A **regulär**, wenn $\det A \neq 0$ ist. A heißt **singulär**, falls $\det A = 0$ gilt.

- Satz

Für quadratische LGS (d.h. $m = n$, Anzahl der Gleichungen gleich Anzahl der Unbekannten, d.h. quadratische Koeffizientenmatrix) gilt:

	inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit A quadratisch	homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ mit A quadratisch
$\det A \neq 0$ (A regulär)	eindeutige Lösung	eindeutige Lösung, $\vec{x} = \vec{0}$
$\det A = 0$ (A singulär)	entweder 1. unendlich viele Lös. oder 2. keine Lösung	unendlich viele Lösungen, darunter ist $\vec{x} = \vec{0}$

- Beweis: Die Aussagen lassen sich aus dem allgemeinen Lösungsschema gewinnen. Man beachte bezüglich der elementaren Umformungen eines LGS:

1. die Multiplikation einer Zeile mit $a \neq 0$ ändert die Koeffizientenmatrix A in die Matrix A' mit $\det A' = a \cdot \det A$, also $\det A' = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$;
2. die Vertauschung von Zeilen oder Spalten ändert die Koeffizientenmatrix A in die Matrix A' mit $\det A = -\det A'$, also $\det A' = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$;
3. die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Koeffizientendeterminante nicht.

- Satz (Cramer-Regel)

Ein quadratisches LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit regulärer Koeffizientenmatrix A (d.h. mit $\det A \neq 0$) besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wobei die Determinante D_i dadurch gebildet wird, daß in $\det A$ der i -te Spaltenvektor durch den Spaltenvektor \vec{b} ersetzt wird,

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Beweis: Siehe einführendes Beispiel zu Determinanten für die Herleitung im Fall $n = 2$.

- Beispiel

- Anmerkung: Der Gauß-Algorithmus löst ein LGS wesentlich schneller als die Cramer-Regel. Diese spielt hauptsächlich bei theoretischen Überlegungen eine Rolle.