

Matrizen

Grundbegriffe, Matrizenmultiplikation

- Definition (Matrix)

Ein System von Zahlen a_{ik} , die rechteckig in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, heißt $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ - **Matrix**:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die a_{ik} heißen *Elemente* der Matrix.

- Bezeichnungen:

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ heißt i -ter **Zeilenvektor**,

$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ heißt k -ter **Spaltenvektor**.

Bei der **Nullmatrix** sind alle $a_{ik} = 0$.

- Anmerkung: Im Gegensatz zu Determinanten kann bei Matrizen $m \neq n$ sein. Eine Matrix mit $m = n$ heißt **quadratische Matrix**. Zu einer quadratischen Matrix A kann die Determinante gebildet werden, Schreibweise: $\det(A)$.

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bilden die **Hauptdiagonale** einer quadratischen Matrix.

- Definition

Die **Transponierte** A^T der Matrix A entsteht durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von A .

- Anmerkung: Es gilt $(A^T)^T = A$.

- Beispiele

- Faßt man Zeilen- und Spaltenvektoren als Matrizen auf, dann entsteht ein Spaltenvektor durch Transponieren des entsprechenden Zeilenvektors

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und umgekehrt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

- Definition

Es sei $A = (a_{ik})$ eine quadratische Matrix. A heißt

1. **symmetrisch**, wenn $A^T = A$ ist, d.h. wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle i, k gilt;
2. **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind, d.h. wenn $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$ gilt;
3. **Einheitsmatrix**, wenn $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $a_{ii} = 1$ für alle i gilt,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

Untere Dreiecksmatrix:

$$a_{ik} = 0 \text{ für } i < k.$$

Obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ik} = 0 \text{ für } i > k.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Beispiele

- Satz

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

- Beweis

- Definition

Die Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ seien beide $m \times n$ -Matrizen.

1. **Gleichheit:** Es sei $A = B$, wenn $a_{ik} = b_{ik}$ für alle i, k ist.
2. **Addition:** Die $m \times n$ -Matrix $C = (c_{ik})$ mit

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad \text{für } i = 1, \dots, m \text{ und } k = 1, \dots, n$$

sei die Summe von A und B , geschrieben $C = A + B$.

3. **Multiplikation mit einer Zahl:** Es sei

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}) \quad \text{für alle } i, k,$$

d.h. jedes Element von A wird mit der Zahl λ multipliziert.

- Anmerkung: Für $A + (-1) \cdot B$ schreiben wir $A - B$ und haben damit auch die **Subtraktion** von Matrizen.

- Beispiele

- Definition (Multiplikation von Matrizen)

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $n \times p$ -Matrix. Das **Produkt** $C = A \cdot B$ **der Matrizen** A und B sei eine $m \times p$ -Matrix $C = (c_{ik})$, deren Elemente durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, p$ berechnet werden.

- Anmerkung:

1. Die Multiplikation $A \cdot B$ ist nur möglich, wenn

$$(\text{Spaltenzahl von } A) = (\text{Zeilenzahl von } B)$$

gilt.

2. Die Zahl c_{ik} ist das Skalarprodukt aus dem i -ten Zeilenvektor von A und dem k -ten Spaltenvektor von B .
3. Im allgemeinen ist $AB \neq BA$.
4. Für Einheitsmatrizen E vom passenden Typ gilt $EA = AE = A$.

- Beispiele, Rechenschema.

- Anmerkung: Die Spaltenvektoren des Produkts $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A . Zum Beispiel ergibt sich für das Produkt

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 5 & 10 \\ -14 & 39 \end{pmatrix}$$

der erste Spaltenvektor der Produktmatrix als Linearkombination

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Ferner sind die Zeilenvektoren von $A \cdot B$ Linearkombinationen der Zeilenvektoren von B , zum Beispiel ist

$$(-3) \cdot (3, 4) + 4 \cdot (7, -5) + 7 \cdot (-2, 6) = (5, 10)$$

der zweite Zeilenvektor von $A \cdot B$.

- Anmerkung: Die Definition der Matrizenmultiplikation ist so gewählt, daß eine $m \times n$ -Matrix eine lineare Abbildung des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m darstellt. Zum Beispiel stellt jede 2×3 -Matrix eine Abbildung der 3-Tupel auf 2-Tupel dar; durch

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wird das Tripel (x, y, z) linear auf das Paar (v, w) abgebildet, da

$$v = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z$$

und

$$w = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z$$

ist.

- Beispiel
- Satz (Rechenregeln für Matrizenprodukte)

Es gilt

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,
3. $(A + B)C = AC + BC$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

(ohne Bew.)

- Satz (Multiplikationssatz für Determinanten)

Es seien A und B quadratische Matrizen vom gleichen Typ. Dann gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(ohne Bew.)