Vektoren

Ebenendarstellungen

- Vektorielle Darstellung einer ***Ebene*** (***Punkt-Richtungsform***)

  Gegeben: Punkt P_1 und zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ (nicht kollinear).
  Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1 und parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

  Alle Punkte der Ebene (und keine anderen Punkte) werden durch

  $$\vec{r}(\lambda, \mu) = \overrightarrow{0P_1} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

  mit Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ beschrieben.

- Skizze

- Beispiel

- Vektorielle Darstellung einer ***Ebene*** (***Dreipunkteform***)

  Gegeben: Drei voneinander verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 (nicht auf einer gemeinsamen Geraden).
  Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1, P_2 und P_3.

  Der Fall läßt sich mit $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$ auf die Punktrichtungsform der Ebenengleichung zurückführen.

- Definition

  Ein ***Normalenvektor*** bezüglich einer Ebene ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

- Vektorielle Darstellung einer ***Ebene*** mittels eines ***Normalenvektors***

  Gegeben: Punkt P_1 und Vektor $\vec{n}$.
  Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1, auf der $\vec{n}$ senkrecht steht.

  Es sei $\vec{r}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene. Der Differenzvektor $\vec{r} - \overrightarrow{0P_1}$ liegt in der Ebene, bildet also mit $\vec{n}$ einen rechten Winkel, d.h. das Skalarprodukt ist Null:

  $$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \overrightarrow{0P_1}) = 0.$$

  Damit gilt: Alle Punkte der Ebene (und keine anderen Punkte) werden durch die Vektoren $\vec{r}$ beschrieben, die der Gleichung

  $$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{0P_1}$$

  genügen.

- Anmerkung: Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ und der Abkürzung $D = \vec{n} \cdot \overrightarrow{0P_1}$ ergibt sich unmittelbar die kartesische Form der Ebenengleichung

  $$Ax + By + Cz = D.$$

  Speziell gilt für eine Ebene, die den Ursprung des Koordinatensystems enthält,

  $$Ax + By + Cz = 0.$$

- Skizze
- Beispiele
- Beispiel: Gerade gegeben; Ebene gegeben. Gesucht ist der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene.
- Satz (Abstand Punkt-Gerade)

  Ein Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{r}_Q$ hat von einer Geraden $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$ den Abstand

  $$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\,.$$

- Beweis
- Satz (Abstand Punkt-Ebene)

  Eine Ebene sei durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben. Ein Punkt Q im Raum hat dann den (senkrechten) Abstand

  $$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$$

  von der Ebene.

- Beweis