

Vektoren

Spatprodukt, Geradendarstellungen

- Definition (Spatprodukt)

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Als **Spatprodukt** (oder *gemischtes Produkt*) der Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} bezeichnen wir die reelle Zahl

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- Geometrische Veranschaulichung mit dem Spatvolumen.
- Satz (Berechnung des Spatprodukts mit einer Determinante)

Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ ist das Spatprodukt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

- Beweis
- Satz

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$ (alle drei Vektoren aus dem \mathbb{R}^3) gilt:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ liegen in einer gemeinsamen Ebene.}$$

- Anmerkung: Vektoren, die in einer gemeinsamen Ebene liegen, heißen **komplanar**.
- Satz (Rechenregeln für das Spatprodukt)

Für das Spatprodukt der Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} gilt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = -[\vec{a}\vec{c}\vec{b}] = -[\vec{c}\vec{b}\vec{a}] = -[\vec{b}\vec{a}\vec{c}],$$

d.h. bei zyklischer Vertauschung bleibt der Wert gleich, wohingegen sich bei nichtzyklischer Vertauschung das Vorzeichen ändert.

- Beweis

- Vektorielle Darstellung einer **Geraden (Punkt-Richtungsform)**

Gegeben: Punkt P_1 und Vektor \vec{a} .

Gesucht: Gleichung der Geraden durch P_1 und parallel zu \vec{a} .

Für einen *beliebigen* Punkt P auf der Geraden gilt:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P_1P} = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{a}$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden durch

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{a}$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschrieben.

- Skizze
- Beispiel
- Vektorielle Darstellung einer **Geraden (Zweipunkteform)**

Gegeben: zwei Punkte P_1, P_2 .

Gesucht: Gleichung der Geraden durch P_1 und P_2 .

Der Fall läßt sich auf die Punkt-Richtungsform zurückführen, wenn als Richtungsvektor $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$ genommen wird.

Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden dann durch

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{P_1P_2}$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschrieben.

- Skizze
- Beispiel: Eine Gerade gehe durch $P_1 = (5 | 3 | -7)$ und $P_2 = (4 | 8 | 1)$. Liegen $P_3 = (3 | 13 | 9)$ und $P_4 = (7 | -7 | 4)$ auf der Geraden?
- Beispiel: Gerade gegeben; Durchstoßpunkt durch die x - y -Ebene gesucht.
- Beispiel: Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.