Vektoren

Einheitsvektoren, Skalarprodukt

- Definition (Einheitsvektor)

  Ein Vektor $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Einheitsvektor***, wenn $|\vec{e}| = 1$ ist, d.h. wenn $\vec{e}$ die Länge 1 hat.

- Anmerkung: Zu $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

  der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$. Wir verwenden die Schreibweise $\vec{e}_{\vec{a}}$.

- Beispiele:
  - Zahlenbeispiel;
  - Gravitationskraft zwischen zwei Massen.

- Definition (kartesische Einheitsvektoren)

  Die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir als ***kartesische Einheitsvektoren***.

  Die Koordinatendarstellung ist im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  und im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Anmerkung (Komponentendarstellung von Vektoren)

  Ein Vektor $\vec{a}$ kann mit Hilfe der kartesischen Einheitsvektoren zerlegt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z.$$

  Die Vektoren $a_x\vec{e}_x$ u.s.w. heißen die ***vektoriellen Komponenten*** von $\vec{a}$.

- Definition (Skalarprodukt)

  Es seien $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ oder $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Ferner sei φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel. Wir bezeichnen die reelle Zahl

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

  als ***Skalarprodukt*** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Anmerkung: Für φ gilt $0° \leq \varphi \leq 180°$. Das Skalarprodukt wird positiv für $\varphi < 90°$ und negativ für $\varphi > 90°$, vorausgesetzt $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- Veranschaulichung mit Projektionen.

- Beispiel: Verschiebungsarbeit.

- Satz (Eigenschaften des Skalarprodukts)

  Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien alle aus dem $\mathbb{R}^2$ oder alle aus dem $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

  1. Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
  2. Distributivität: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
  3. $\lambda(\vec{a}\,\vec{b}) = (\lambda\,\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a}\,(\lambda\,\vec{b})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Beweis (geometrisch mit Hilfe von Projektionen bei der Distributivität).

- Satz

  Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ (beide aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) gilt

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b}.$$

- Beweis

- Anmerkung: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, die senkrecht aufeinander stehen, heißen ***orthogonal***.

- Beispiel: kartesische Einheitsvektoren.

- Satz (Berechnung des Skalarprodukts aus den Vektorkoordinaten)

  1. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt

     $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

  2. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt

     $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Beweis
- Satz (Winkel zwischen zwei Vektoren)

  Es sei $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ (beide aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$). Dann ist

$$\arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

  der Winkel zwischen den beiden Vektoren.
- Beispiel