

## Vektoren

### Grundbegriffe, Schreibweisen, elementare Rechenregeln

- Physikalische Größen bestehen aus
  1. Maßzahl und Einheit; Bezeichnung: Skalar, skalare Größe (z.B. Masse, Temperatur, Energie);
  2. Maßzahl, Richtung und Einheit; Bezeichnung: Vektor, vektorielle Größe (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke).

- Definition (geometrisch)

Es seien  $P$  und  $Q$  zwei Punkte im Raum. Die gerichtete Strecke von  $P$  nach  $Q$  nennt man einen **Vektor**, Schreibweise:  $\overrightarrow{PQ}$ . Dabei heißt  $P$  Anfangs- und  $Q$  Endpunkt.

- Definition (geometrisch)

Zwei Vektoren heißen **gleich**, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind.

- Skizze: Die Längen und Richtungen der Vektorpfeile stimmen überein.
- Anmerkung: Spielt der Anfangspunkt eine Rolle, muß eine Zusatzinformation gegeben werden, z.B. „der Kraftvektor  $\vec{F}$  greift im Punkt  $P$  an“.

Durch unsere Festlegung der Gleichheit wird es möglich, Vektoren auf eine einfache Art zahlenmäßig zu beschreiben: Wir gehen davon aus, daß die Punkte des Raums durch ein kartesisches Koordinatensystem dargestellt werden. Ein gegebener Vektor  $\vec{a}$  wird dann parallel verschoben, so daß sein Anfangspunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zu liegen kommt. Die Koordinaten des Endpunkts von  $\vec{a}$  charakterisieren dann  $\vec{a}$  vollständig.

Wir bezeichnen die Koordinaten der Vektorspitze von  $\vec{a}$  durch  $a_x$  und  $a_y$ , wenn wir in der Ebene arbeiten. Im Raum kommt noch  $a_z$  hinzu. Liegt der Vektor in der Ebene, wird er also durch das Zahlenpaar  $(a_x, a_y)$  vollständig beschrieben. Im Raum stellt das Tripel  $(a_x, a_y, a_z)$  den Vektor eindeutig dar. Wir schreiben:  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ .

Für  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  und  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  gilt damit  $\vec{a} = \vec{b}$  genau dann, wenn  $a_x = b_x$ ,  $a_y = b_y$  und  $a_z = b_z$  ist.

- Bezeichnungen (Koordinatendarstellung von Vektoren)

Die Darstellung von  $\vec{a}$  als  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  heißt **Zeilenvektor**, die Darstellung  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  **Spaltenvektor**, entsprechend im Dreidimensionalen.

Die reellen Zahlen  $a_x$ ,  $a_y$  und  $a_z$  heißen die **Koordinaten** (oder die *skalaren Komponenten*) des Vektors.

- Anmerkung: Das kartesische Koordinatensystem, das wir im dreidimensionalen Raum verwenden, soll ein **Rechtssystem** sein, d.h. die  $z$ -Achse zeigt in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube bewegt, wenn sie so herum gedreht wird, wie bei der Drehung der positiven  $x$ -Achse auf kürzestem Weg in die positive  $y$ -Achse.
- Bezeichnung: Zu einem Punkt  $P$  der Ebene oder des Raumes heißt der Vektor vom Ursprung (Nullpunkt) des Koordinatensystems nach  $P$  der **Ortsvektor** von  $P$ , geschrieben  $\vec{OP}$ .
- Anmerkung: Das *Parallelogramm der Kräfte* legt nahe, daß für die Addition zweier Vektoren  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  und  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  die Festlegung

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

sinnvoll ist.

Da für  $\vec{F} + \vec{F}$  die Schreibweise  $2 \cdot \vec{F}$  vernünftig ist, bietet es sich ferner an, für die Multiplikation einer Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit einem Vektor  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  die Vereinbarung

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

zu treffen.

Arbeitet man im Zweidimensionalen, läßt man die dritte Koordinate weg.

- Skizzen (auch zur Summe mehrerer Vektoren: Vektorpolygon).
- Anmerkung: Statt  $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$  schreibt man  $\vec{a} - \vec{b}$  und hat damit auch die Subtraktion von Vektoren eingeführt.
- Anmerkung: Vom Vektor  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  in der Ebenen und dem Vektor  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  im Raum verallgemeinern wir auf den Vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  im  $n$ -dimensionalen Raum.

Dabei definieren wir den allgemeinen Vektorbegriff so, daß die zwei- und dreidimensionalen Spezialfälle unseren bisherigen Veranschaulichungen entsprechen.

- Definition ( $n$ -dimensionaler Vektorraum)

Die Menge der reellen  $n$ -Tupel

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ mit } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

mit den Operationen

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R}),$$

heißt der  **$n$ -dimensionale Vektorraum** über  $\mathbb{R}$ .

Die Elemente des  $\mathbb{R}^n$  heißen **Vektoren**.

Zum  $n$ -dimensionalen Vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  heißen die  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die **Koordinaten** (*skalaren Komponenten*) des Vektors.

Wir schreiben  $\vec{a} - \vec{b}$  für  $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ .

- Anmerkung:
  1. Speziell ist  $0 \cdot \vec{a} = (0, 0, \dots, 0)$ , der sogenannte **Nullvektor**, Schreibweise:  $\vec{0}$ . Der Nullvektor hat als einziger Vektor keine Richtung.
  2. Der Vektor  $-\vec{a}$  heißt „der zu  $\vec{a}$  entgegengesetzt gleiche (inverse) Vektor“.
  3. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heißen zueinander parallel,  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , falls  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  mit  $\lambda > 0$  ist, sie heißen antiparallel,  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ , falls  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  mit  $\lambda < 0$  ist.
- Anmerkung: Die Spezialfälle  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  können wir uns durch Pfeile in der Ebene bzw. im Raum veranschaulichen.

- Beispiele

- Satz (Rechenregeln)

Es seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

1.  $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \vec{a} \in \mathbb{R}^n,$
2.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{Kommutativität}),$
3.  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{Assoziativität}),$
4.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} \quad (\text{Existenz eines neutralen Elements}),$
5.  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (\text{Existenz inverser Elemente}),$
6.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (\text{Distributivität}),$
7.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \quad (\text{Distributivität}),$
8.  $(\lambda \mu)\vec{a} = \lambda(\mu \vec{a}),$
9.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$

- Beweis: Folgt sofort aus den Definitionen von  $\vec{a} + \vec{b}$  und  $\lambda \vec{a}$  sowie den Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ .

- Definition (Betrag)

Es sei  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Die reelle Zahl

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

heißt **Betrag** (Länge) von  $\vec{a}$ .

- Anmerkung: Im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entspricht das der Länge des Vektorpfeils, berechnet nach dem Satz des Pythagoras.

- Satz (Eigenschaften des Betrags)

Es gilt

1.  $|\vec{a}| \geq 0$ ,  $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ,
2.  $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ,
3.  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  (Dreiecksungleichung).

- Anmerkung: Die anschauliche Formulierung „Länge und Richtung legen einen Vektor fest“ heißt in Formeln ausgedrückt:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \uparrow \vec{b}.$$

Ferner gilt

$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \updownarrow \vec{b}.$$

- Beispiele