Determinanten

Entwicklungssatz, Rechenregeln

- Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

  Der Wert einer Determinante kann durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte berechnet werden. Dabei werden die Elemente und die zugehörigen Kofaktoren der betreffenden Zeile oder Spalte verwendet.

  Der Wert D einer Determinante n-ter Ordnung ergibt sich bei Entwicklung nach der i-ten Zeile als

  $$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$$

  und bei Entwicklung nach der k-ten Spalte als

  $$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}C_{ik}\,.$$

- Beispiel

- Anmerkung: Günstig ist die Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte, die viele Nullen enthält, weil man dann Rechenarbeit spart. Enthält eine Determinate wenige oder gar keine Nullen, hat man zunächst Pech, aber man kann die Situation drastisch verbessern: Nullen können vor der Entwicklung erzeugt werden! Dazu werden Regeln zum Umformen von Determinanten verwendet.

- Satz (Rechenregeln für Determinanten)

  Es sei D eine Determinante beliebiger Ordnung.

  1. D wird mit einem Faktor λ multipliziert, indem *eine* Zeile oder *eine* Spalte von D mit λ multipliziert wird.
  2. Werden zwei Zeilen von D vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen von D, ebenso bei der Vertauschung zweier Spalten.
  3. Sind zwei Zeilen von D zueinander proportional, oder sind zwei Spalten proportional zueinander, so ist $D = 0$.
  4. Der Wert von D ändert sich nicht, wenn ein beliebiges Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird. Ebenso bleibt der Wert von D bei Addition eines beliebigen Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte erhalten.

- Beispiele
- Anmerkung: Bei der Berechnung des Determinantenwertes nach dem Gauß-Algorithmus bringt man eine Determinante zunächst auf Dreiecksgestalt und bildet dann das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

  Diese Methode ist schnell und eignet sich zur Programmierung.
- Beispiel
- Herleitung der Rechenregeln (Prinzip; speziell bei Determinanten 3. Ordnung).
- Anmerkung: Angenommen es sollen Programme getestet werden, mit denen man die Werte von Determinanten berechnen kann. (Liefern die Programme die korrekten Werte? Welches Programm ist am schnellsten?) Dann ist es nützlich, große Determinanten zu haben, deren Werte man kennt.

  Ein schönes Beispiel sind die Determinanten, bei denen in der Hauptdiagonalen überall 2 und sonst überall 1 steht. Der Wert ist hierbei gleich $n+1$, wenn die Ordnung gleich n ist. Zum Beispiel gilt

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

  Die entsprechende Determinante mit 500 Zeilen und 500 Spalten hat den Wert 501, die mit 1000 Zeilen bzw. Spalten hat den Wert 1001.