Determinanten

Einführung, Grundbegriffe

- Als einführendes Beispiel betrachten wir ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten x und y.

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

Mit einfachen Umformungen ergeben sich die Lösungsformeln

$$x = \frac{dr - bs}{ad - bc}, \qquad \text{falls Nenner} \neq 0$$

und

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}, \qquad \text{falls Nenner} \neq 0.$$

Der Wert $D = ad - bc$ des Nenners bestimmt (determiniert) die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Wir führen eine neue Schreibweise für D ein, und bezeichnen diese Darstellung als ***Determinante***:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- Anmerkung: Wir können in den beiden Lösungsformeln auch die Zähler mit der neuen Schreibweise als Determinanten darstellen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad \text{und} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

- Definition (Determinante)

  Eine ***Determinante*** ist ein quadratisches Zahlenschema, das eine Zahl darstellt, die folgendermaßen bestimmt wird:

  (a) Determinante 1. Ordnung,

$$|a| = a,$$

(b) Determinante 2. Ordnung,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

(c) Determinante 3. Ordnung,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

- Anmerkung: Entsprechend werden Determinanten höherer Ordnung rekursiv definiert; eine Determinante n-ter Ordnung wird auf Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung zurückgeführt.

  Damit erhalten wir schrittweise höhere Ordnungen und haben insgesamt den Begriff der Determinante für beliebige Ordnungen festgelegt.

- Bezeichnungen: Zeilen, Spalten, Hauptdiagonale; Schreibweise der Elemente mit Indizes (Zeilen zuerst).

- Beispiele

- Anmerkung: Bei Determinanten 3. Ordnung (und nur dort) gibt es eine alternative Berechnungsmethode, die *Regel von Sarrus*.

- Definition (Unterdeterminante)

  Zu einer Determinante D entsteht die ***Unterdeterminante*** D_{ik} durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte von D.

  Hat D die Ordnung n, so hat D_{ik} die Ordnung $n-1$.

- Anmerkung: Damit ist eine vereinfachte Schreibweise möglich, z.B. für die Entwicklung einer Determinante dritter Ordnung nach der ersten Zeile,

$$D = a_{11} \cdot D_{11} - a_{12} \cdot D_{12} + a_{13} \cdot D_{13}.$$

  Noch einfacher wird die Schreibweise, wenn man die Vorzeichen der Summanden mit den Unterdeterminanten zusammenfasst.

- Definition (Kofaktor)

  Zu einer Determinante D heißt das Produkt $(-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ der ***Kofaktor*** des Elementes a_{ik}, geschrieben C_{ik}. (Statt „Kofaktor“ sagt man auch *algebraisches Komplement* oder auch *Adjunkte*.)

- Beispiel

- Bestimmung des Vorzeichens mit der Schachbrettregel.

- Anmerkung: Die rekursive Berechnung einer Determinante D der Ordnung $n > 1$ kann jetzt einfach als $D = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} C_{1k}$ geschrieben werden.