Lineare Gleichungssysteme 2

- Mit elementaren Umformungen läßt sich jedes LGS

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

  auf das folgende Lösungsschema bringen (konkrete Durchführung: mit dem Gauß-Algorithmus).

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ k \\ \\ k+1 \\ \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & & & k & k+1 & & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{k,n} \end{array}\right] \\ \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array} \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_m \end{array}\right]$$

- Definition

  Die Zahl k heißt der ***Rang*** des LGS,

$$k = \mathrm{rg}(\mathrm{LGS}).$$

- Anmerkung: Der Rang k ist unabhängig von Art und Reihenfolge der elementaren Umformungen. (Verschiedene Werte von k würden verschiedene Lösungsmengen nach sich ziehen. Das kann nicht sein, da die elementaren Umformungen die Lösungsmenge des LGS nicht verändern.)

- Diskussion des Lösungsschemas

  (a) Das LGS ist genau dann ***lösbar***, wenn $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \ldots = \beta_m = 0$ ist. (Sonst ist das LGS nicht lösbar, d.h. seine Lösungsmenge ist $L = \emptyset$.)

  Für lösbare LGS gilt:

Copyright © 2008, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(b) Das LGS ist genau dann ***eindeutig lösbar***, wenn $k = n$ ist (Rang maximal). Lösung:

$$\vec{x} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^T = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^T.$$

(c) Das LGS hat genau dann ***unendlich viele Lösungen***, wenn $k < n$ ist. Dann können die Unbekannten $x_{k+1}, \ldots, x_n$ frei gewählt und x_1, $x_2, \ldots, x_k$ durch sie ausgedrückt werden; wir haben also $(n-k)$ freie Parameter $\lambda_1 = x_{k+1}$, $\lambda_2 = x_{k+2}, \ldots, \lambda_{n-k} = x_n$, und es gilt

$$x_i = \beta_i - \alpha_{i,k+1} \cdot \lambda_1 - \alpha_{i,k+2} \cdot \lambda_2 - \ldots - \alpha_{i,n} \cdot \lambda_{n-k}$$

für $i = 1, \ldots, k$.

- Definition

  Wir nennen $n - k$ die ***Dimension*** der Lösungsmenge,

$$\dim L = n - k.$$

- Anmerkung: Die Dimension der Lösungsmenge ist also gleich der Anzahl der Spalten im mittleren oberen Kästchen des Lösungsschemas.

- Satz

$$\mathrm{rg}(\mathrm{LGS}) + \dim L = n$$

- Beispiel zur Diskussion des Lösungsschemas:

1	0	0	2	3	1
0	1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	3/2
0	0	0	0	0	β

- Beispiel zur Diskussion des Lösungsschemas:

1	0	0	2
0	1	0	3
0	0	1	4
0	0	0	0

- Beispiel zur Diskussion des Lösungsschemas:

1	2	3	4

- Beispiele zur Umformung linearer Gleichungssysteme auf das Lösungsschema mittels Gauß-Algorithmus.

- Geometrische Interpretation bei drei Unbekannten.

  Das komplette Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme kann geometrisch veranschaulicht werden. Dazu betrachten wir Systeme mit drei Unbekannten.

  Jede Gleichung
  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$
  stellt eine Ebene im Raum dar. Bei einem LGS mit m Gleichungen ist $i = 1, \ldots, m$, und wir haben m Ebenen.

  Die Lösungsmenge des LGS besteht aus allen Tripeln (x_1, x_2, x_3), die alle m Gleichungen erfüllen. Geometrisch stellt ein solches Tripel die Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum dar, und das Erfüllen der m Gleichungen bedeutet, daß der Punkt auf allen m Ebenen liegt.

  Die Lösungsmenge besteht also aus den Koordinaten derjenigen Raumpunkte, die zu allen Ebenen gleichzeitig gehören.

  Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

  - Eine Gleichung (m = 1).

    Eine Ebene im Raum; unendlich viele Lösungen (alle Punkte der Ebene); $\dim(L) = 2$, d.h. zwei freie Parameter, rg(LGS) = 1.
  - Zwei Gleichungen (m = 2).
    (a) Parallele Ebenen; LGS nicht lösbar.
    (b) Identische Ebenen; unendlich viele Lösungen (alle Punkte der Ebene); $\dim(L) = 2$, d.h. zwei freie Parameter, rg(LGS) = 1.
    (c) Ebenen haben Schnittgerade gemeinsam; unendlich viele Lösungen (alle Punkte der Schnittgeraden); $\dim(L) = 1$, d.h. ein freier Parameter, rg(LGS) = 2.
  - Drei Gleichungen (m = 3).
    (a) Mindestens zwei Ebenen parallel oder „Rohr“ mit dreieckigem Querschnitt; LGS nicht lösbar.
    (b) Alle drei Ebenen identisch; unendlich viele Lösungen (alle Punkte der Ebene); $\dim(L) = 2$, d.h. zwei freie Parameter, rg(LGS) = 1.
    (c) Die drei Ebenen haben genau eine Schnittgerade gemeinsam; unendlich viele Lösungen (alle Punkte auf der Schnittgeraden); $\dim(L) = 1$, d.h. ein freier Parameter, rg(LGS) = 2.
    (d) Die drei Ebenen haben genau einen Schnittpunkt gemeinsam; genau eine Lösung (der Schnittpunkt); $\dim(L) = 0$, d.h. kein freier Parameter, rg(LGS) = 3.

  In allen Fällen ist die Anzahl der Unbekannten $n = 3 = \dim(L) + \mathrm{rg}(\mathrm{LGS})$.

Spezialfall: Gleichungen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0$$

stellen Ebenen durch den Ursprung des Koordinatensystems dar, d.h. der Punkt mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ liegt auf der Ebene. Bei einem homogenen LGS gehen also alle Ebenen durch den Ursprung; ein homogenes LGS hat stets die triviale Lösung. Hat ein homogenes LGS mit drei Unbekannten mehr als die triviale Lösung, dann sind das die unendlich vielen Punkte auf einer Geraden durch den Ursprung oder die unendlich vielen Punkte auf einer Ebene durch den Ursprung.