Differentialrechnung 5

- Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0 \,|\, f(x_0))$.

  Im folgenden untersuchen wir mit Hilfe der Differentialrechnung weitere geometrische Eigenschaften von Funktionskurven.

- ***Tangente*** und ***Normale***

  Die Normale zur Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist die Gerade, die senkrecht auf der Tangente an f im Punkt $(x_0 \,|\, f(x_0))$ steht. Es gilt

  $$\text{Normalensteigung} = -\frac{1}{\text{Tangentensteigung}}$$

  (Skizze).

- Satz

  Es sei f differenzierbar an der Stelle x_0. Die ***Tangente*** an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P = (x_0 \,|\, y_0)$ hat die Gleichung

  $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0).$$

  Für $f'(x_0) \neq 0$ wird die ***Normale*** durch

  $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

  beschrieben.

- Beispiel

- ***Wachstum*** und ***Krümmung***

$f'(x_0) > 0$	Die Kurve $y = f(x)$ *wächst* in der Umgebung von x_0.
$f'(x_0) < 0$	$y = f(x)$ *fällt* in der Umgebung von x_0.
$f''(x_0) > 0$	Die Tangentensteigung *wächst* in der Umgebung von x_0; die Kurve $y = f(x)$ hat eine *Linkskrümmung* in x_0.
$f''(x_0) < 0$	*Rechtskrümmung* in x_0.

- Skizze
- ***Extremwerte***

  Extremwerte sind Maxima (Hochpunkte) oder Minima (Tiefpunkte) einer Funktionskurve.

- Definition

  Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein ***lokales (relatives) Maximum***, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ in einer Umgebung von x_0 gilt.

  Entsprechend hat f für $f(x_0) \leq f(x)$ (in einer Umgebung von x_0) ein ***lokales (relatives) Minimum*** an x_0.

  Gilt die Ungleichung für alle $x \in D(f)$, spricht man von einem ***globalen (absoluten) Maximum*** bzw. ***Minimum***.

- Skizze
- Satz

  Hat die Funktion f an x_0 einen Extremwert und ist sie dort differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung.
- Anmerkung: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist (bei einer differenzierbaren Funktion) für die Existenz eines Extremwerts notwendig aber nicht hinreichend.
- Beispiel
- Satz

  Die Funktion f sei zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0. Wenn gilt

  $$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

  dann hat $y = f(x)$ an der Stelle x_0 einen Extremwert. Der Extremwert ist ein Maximum für $f''(x_0) < 0$. Er ist ein Minimum für $f''(x_0) > 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung. Beispiel.
- ***Wendepunkte*** und ***Sattelpunkte***

  Anschaulich hat eine Funktion f an der Stelle $x_0 \in D(f)$ einen Wendepunkt, wenn sich der Drehsinn der Tangente ändert. Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen Sattelpunkte.

- Definition

  Die Funktion f sei differenzierbar auf einer Umgebung von x_0. Hat die Ableitung f' einen Extremwert an der Stelle x_0, dann hat $y = f(x)$ dort einen ***Wendepunkt***.

  Dieser ist ein ***Sattelpunkt***, wenn zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt.

- Skizze

- Satz

  Hat die Funktion f an x_0 einen Wendepunkt und ist sie dort zweimal differenzierbar, so gilt $f''(x_0) = 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung.

- Anmerkung: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist (bei einer zweimal differenzierbaren Funktion) für die Existenz eines Wendepunktes notwendig aber nicht hinreichend.

- Beispiel

- Satz

  Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar. Wenn gilt

  $$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

  dann hat $y = f(x)$ einen Wendepunkt an x_0.

- Skizze und anschauliche Begründung. Beispiel.

- Satz (Allgemeines Kriterium für ***Extremwerte*** und ***Sattelpunkte***)

  Die Funktion f sei n-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0, wobei $n > 1$ sei. Wenn $f^{(n)}(x_0)$ die erste nichtverschwindende Ableitung an der Stelle x_0 ist, also

  $$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

  und

  $$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

  gilt, dann hat f an x_0 für

  (a) gerades n einen Extremwert und für
  (b) ungerades n einen Sattelpunkt.

  Im Falle des Extremwerts liegt ein Maximum vor, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist, und ein Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist.

  (ohne Bew.)