

Funktionen 1

- Definition (Funktion)

Es seien A und B Mengen. Eine **Funktion** (oder *Abbildung*) f von A nach B ,

$$f : A \longrightarrow B$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Schreibweise:

$$y = f(x).$$

Dabei heißt x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

Die Menge A heißt **Definitionsbereich** (oder *Definitionsmenge*) von f , geschrieben $D(f)$. Die Menge $\{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$ heißt **Wertebereich** (oder *Wertemenge, Bildmenge*) von f , kurz $W(f)$.

- Skizzen:

- (a) Schematische Darstellung der Zuordnung $y = f(x)$,
- (b) $f(a) = f(b)$ ist erlaubt,
- (c) ein Beispiel für eine nicht erlaubte Zuordnung.

- Definition (Graph)

Der **Graph** einer Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist die Menge der geordneten Paare $\{(x, y) \mid x \in A \text{ und } f(x) = y\}$.

- Beispiele: Wir betrachten die Graphen

- der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$,
- der Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$,
- der Winkelfunktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$.

Siehe die Abbildungen auf den folgenden Seiten.

- Beispiel: Parameterdarstellung einer Funktion.

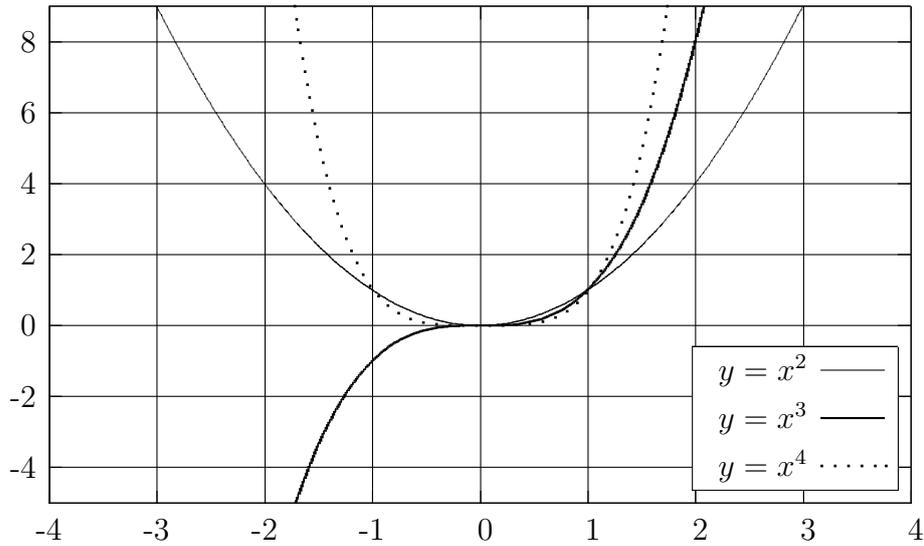


Abbildung 1: Potenzfunktionen

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Eine Funktion heißt

gerade $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

ungerade $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

monoton wachsend $\Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

monoton fallend $\Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

streng monoton fallend $\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

(streng) monoton $\Leftrightarrow f$ (streng) monoton wachsend oder fallend;

periodisch \Leftrightarrow existiert ein $p > 0$ mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

beschränkt \Leftrightarrow existiert ein $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D(f)$.

- Veranschaulichungen und Beispiele.

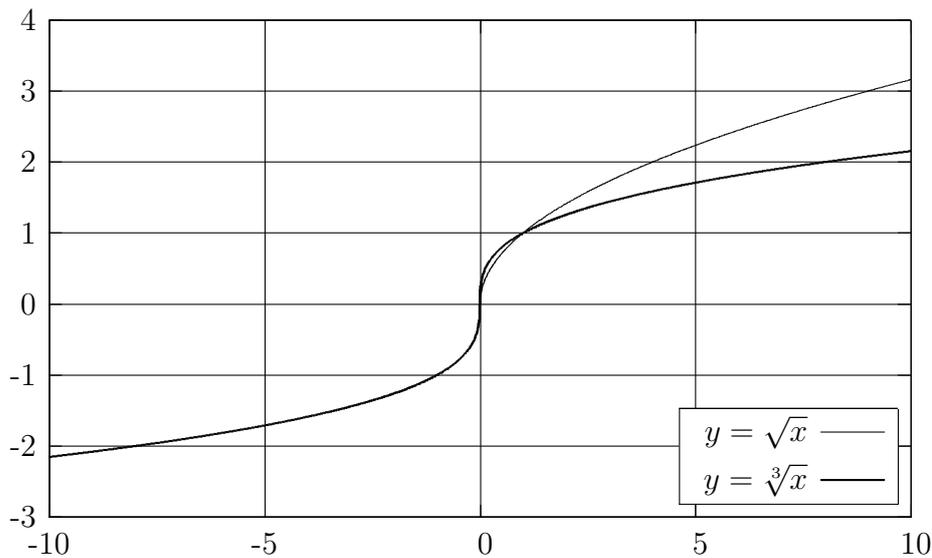


Abbildung 2: Wurzelfunktionen

- Verschiebung von Funktionen

Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x - y -Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht verschoben werden. Die Strecke der Verschiebung soll die Länge k mit $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ haben.

- Senkrechte Verschiebung

$f(x) + k$ verschiebt f um k nach oben.

$f(x) - k$ verschiebt f um k nach unten.

- Waagrechte Verschiebung

$f(x - k)$ verschiebt f um k nach rechts.

$f(x + k)$ verschiebt f um k nach links.

- Beispiele

- Streckung/Stauchung von Funktionen

Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x - y -Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht gestreckt bzw. gestaucht werden.

- Senkrechte Streckung/Stauchung

$k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ streckt in y -Richtung auf das k -fache.

$k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ staucht in y -Richtung auf das k -fache.

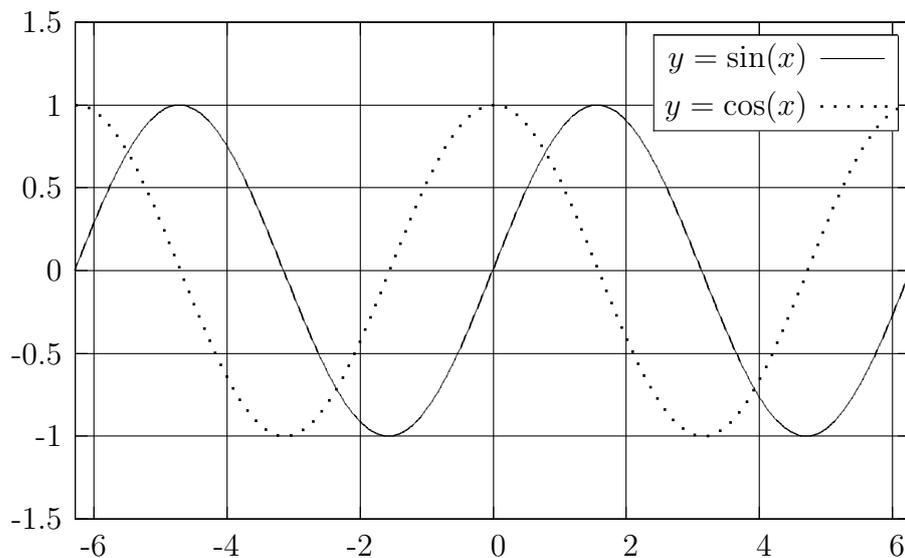


Abbildung 3: Winkelfunktionen

- Waagrechte Streckung/Stauchung
 $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ streckt in x -Richtung auf das $(1/k)$ -fache.
 $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ staucht in x -Richtung auf das $(1/k)$ -fache.
- Beispiele
- Was geschieht bei $g(x) = -2,5 \cdot f(x)$ oder $h(x) = f(-0,5 \cdot x)$?
- Definition (umkehrbare Funktion)
 Eine Funktion f heißt **umkehrbar**, wenn aus $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
- Skizze, graphische Interpretation.
- **Umkehrfunktion** graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.
- **Umkehrfunktion** rechnerisch: $y = f(x)$ nach x auflösen (falls möglich); dann x und y vertauschen.
- Beispiele
- Anmerkung: Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion zu f ist gleich dem Wertebereich von f .
- Satz
 Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.