Partielle Ableitungen und Fehlerrechnung 2

- Beispiel
- Definition

  Zu den ***wahren Werten*** x_w, y_w, ... werden ***Näherungswerte*** $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, ... bestimmt, zum Beispiel Meßwerte oder Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{y}$, ... aus Einzelmessungen.

  Als ***absoluten Fehler*** von $\tilde{x}$ bezeichnen wir

  $$|x_w - \tilde{x}|$$

  und als ***relativen Fehler*** von $\tilde{x}$

  $$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right| .$$

  Der relative Fehler ausgedrückt in Prozenten wird ***prozentualer Fehler*** genannt.

- Anmerkung:

  (a) Da der wahre Wert normalerweise unbekannt ist, wird der absolute Fehler üblicherweise abgeschätzt,

  $$|x_w - \tilde{x}| \approx \Delta x$$

  und die Abschätzung zusammen mit dem Näherungswert z.B. durch $x = \bar{x} \pm \Delta x$ angegeben. (Diese Schreibweise wird aber auch verwendet, wenn Δx aufgrund eines anderen Fehlerkonzepts zustande kommt.)

  (b) Der relative Fehler wird durch

  $$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right| \approx \left| \frac{x_w - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right| \approx \left| \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \right|$$

  abgeschätzt, z.B. durch $|\Delta x / \bar{x}|$.

  (c) Der prozentuale Fehler ist

  $$100 \cdot (\text{relativer Fehler})\%,$$

  z.B. $100 \cdot |\Delta x / \bar{x}|\,\%$.

- Problemstellung:

  Eine Größe y hängt von den Veränderlichen x_1, x_2, …, x_n ab:

  $$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

  Hätte man die wahren Werte von x_1, …, x_n zur Verfügung, könnte man diese in die Formel f einsetzen und den wahren Wert y_w von y berechnen. Weil man die wahren Werte aber nicht kennt, setzt man die Näherungswerte $\tilde{x}_1$, …, $\tilde{x}_n$ ein, und erhält für y die Näherung

  $$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n).$$

  Jetzt ist eine ***Abschätzung des absoluten Fehlers*** $|y_w - \tilde{y}|$ gesucht.

  Das Problem bei dieser Abschätzung ist, aus den Fehlern von $\tilde{x}_1$, …, $\tilde{x}_n$ mit Hilfe der Formel f auf den Fehler von $\tilde{y}$ zu schließen.

- Lösungsidee:

  Näherungsweise Fehlerabschätzung durch Linearisierung von f mit dem totalen Differential.

- Skizze

- ***Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz***

  Sind die Δx_i für $i = 1, \ldots n$ Abschätzungen der absoluten Fehler von $\tilde{x}_i$, so kann der absolute Fehler $|y_w - \tilde{y}|$ von $\tilde{y}$ abgeschätzt werden durch

  $$\Delta y_{max} = |f_{x_1} \cdot \Delta x_1| + |f_{x_2} \cdot \Delta x_2| + \ldots + |f_{x_n} \cdot \Delta x_n|\,,$$

  wobei in die Funktionen f_{x_1}, …, f_{x_n} die Näherungswerte $\tilde{x}_i$ von x_i eingesetzt werden.

- Anmerkung: Der Wert Δy_{max} heißt ***maximaler absoluter Fehler*** von $\tilde{y}$.

- Anmerkung: Mit Δy_{max} bekommt man den ***relativen Maximalfehler***

  $$\left|\frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}}\right| = \left|\frac{\Delta y_{max}}{f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}\right|$$

  und den ***prozentualen Maximalfehler***

  $$100 \cdot \left|\frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}}\right| \%.$$

- Beispiel

- Spezialfall $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\, x_1^{c_1}\, x_2^{c_2}\, \ldots\, x_n^{c_n}$

  Die Maximalfehler von $y = a\, x_1^{c_1}\, x_2^{c_2}\, \ldots\, x_n^{c_n}$ setzen sich linear aus den relativen Fehlern
  $$\left|\frac{\Delta x_i}{\tilde{x}_i}\right|$$
  der $\tilde{x}_i$ zusammen.

  Absoluter Maximalfehler:
  $$\Delta y_{max} = |f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)| \cdot \left(|c_1| \cdot \left|\frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1}\right| + |c_2| \cdot \left|\frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2}\right| + \ldots + |c_n| \cdot \left|\frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n}\right| \right).$$

  Relativer Maximalfehler:
  $$\left|\frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}}\right| = |c_1| \cdot \left|\frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1}\right| + |c_2| \cdot \left|\frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2}\right| + \ldots + |c_n| \cdot \left|\frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n}\right|.$$

- Anmerkung: Der relative Fehler von $\tilde{y} = (\tilde{x})^n$ ist also das n-fache des relativen Fehlers von $\tilde{x}$.

  Ferner ist der relative Fehler von $\tilde{y} = \sqrt[n]{\tilde{x}}$ der n-te Teil des relativen Fehlers von $\tilde{x}$.

- Beispiele