

Funktionen 2

- Wir betrachten einige *elementare Funktionen*:

Polynome, Gebrochenrationale Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie Winkelfunktionen.

- Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, heißt **Polynom n-ten Grades** oder **ganzrationale Funktion**. Die a_0, \dots, a_n ($a_n \neq 0$) heißen **Koeffizienten**.

- Anmerkung: Spezialfälle sind die konstante, lineare, quadratische und kubische Funktion, sowie allgemein die Potenzfunktion $y = x^n$ mit natürlichem Exponenten n .
- Satz

Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade n und x_1 eine Nullstelle von f , d.h. $f(x_1) = 0$. Dann ist

$$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$

mit dem 1. reduzierten Polynom f_1 , das den Grad $n - 1$ hat, und dem Linearfaktor $(x - x_1)$.

- Anmerkung: Man berechnet f_1 durch eine Polynomdivision, bei der f durch $(x - x_1)$ geteilt wird.
- Satz

Ein Polynom n -ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Hat es genau n reelle Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n , so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

- Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**. Ist eine lineare Funktion in der Form $y = mx + b$ gegeben, so ist m die Steigung der Geraden und b der Abschnitt auf der y -Achse. (Skizze zeichnen!)

Wird eine Gerade durch ihre Steigung m und durch einen Punkt $P_1(x_1|y_1)$ auf der Geraden definiert, erhält man die zugehörige Funktion wie folgt: Es sei $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt ungleich P_1 auf der Geraden. Die Steigung ist dann die Differenz der y -Werte geteilt durch die Differenz der x -Werte

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

(Skizze zeichnen!)

Ist eine Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben, ist die Steigung zwischen P_1 und P_2 gleich der Steigung zwischen P_1 und P , also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(Skizze zeichnen!)

- Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine **Parabel**. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

Hat die Parabel Schnittpunkte mit der waagrechten Achse, berechnet man die Koordinaten durch Lösen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Wenn die Parabel keine Schnittpunkte mit der waagrechten Achse hat, erhält man beim Lösen der quadratischen Gleichung eine Wurzel aus einer negativen Zahl.

- Definition

Der Quotient zweier Polynome

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}$$

heißt **gebrochenrationale Funktion**. Der Definitionsbereich ist

$$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \neq 0\}.$$

Für $m > n$ ist die Funktion *echt* gebrochenrational, für $m \leq n$ *unecht* gebrochenrational.

- Anmerkung: Haben das Zähler- und das Nennerpolynom eine gemeinsame Nullstelle x_0 , so kann man den Linearfaktor $(x - x_0)$ kürzen. Die Definitionslücke an der Stelle x_0 wird dadurch behoben.

Hat man so weit wie möglich gekürzt, haben Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsame Nullstelle mehr. Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind dann die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Polstellen (Unendlichkeitsstellen).

- Anmerkung: Ist $r(x)$ unecht gebrochenrational, kann man die Funktion durch Polynomdivision—bei der man den Zähler durch den Nenner teilt—in

$$r(x) = p(x) + g(x)$$

zerlegen, wobei p ein Polynom und g eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Für wachsendes x werden die Werte von $g(x)$ immer kleiner, unabhängig vom Vorzeichen von x , so daß sich die Kurve von r immer dichter an die Kurve von p anschmiegt. Man nennt p deshalb die Asymptote von r im Unendlichen.

- Definition

Funktionen $f(x) = x^a$ mit konstantem Exponenten a und variabler Basis x heißen **Potenzfunktionen**. Im allgemeinen Fall, also für beliebige reelle Exponenten a , sind sie für positive x definiert.

- Anmerkung: In wichtigen Fällen erweitert sich der Definitionsbereich. Dazu seien nur Zahlen aus bestimmten Teilmengen von \mathbb{R} für die Exponenten zugelassen.

- Natürliche Zahlen: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.
- Negative ganze Zahlen: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Ist n gerade, sind die Funktionen $y = x^n$ für $x \geq 0$ streng monoton, also auf dem Intervall $[0, \infty)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind die **Wurzelfunktionen** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n gerade. Definitionsbereich ist $D(f) = [0, \infty)$.
- Ist n ungerade, sind die Funktionen $y = x^n$ auf \mathbb{R} streng monoton und somit umkehrbar. Umkehrfunktionen sind die **Wurzelfunktionen** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade. Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

- Anmerkung: Man beachte die Rechenregeln für Potenzen. Für $x, x_1, x_2 > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} = (x^b)^a \\ x_1^a \cdot x_2^a &= (x_1 \cdot x_2)^a\end{aligned}$$

Speziell mit $m, n \in \mathbb{N}$ gilt für Wurzeln

$$\begin{aligned}x^{m/n} &= \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} &= \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\end{aligned}$$

- Definition

Funktionen vom Typ $f(x) = b^x$ mit konstanter Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ heißen **Exponentialfunktionen**. Der Exponent x ist variabel und darf beliebige reelle Werte annehmen, d.h. der Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion mit der Basis e , die **e-Funktion**

$$y = e^x = \exp(x).$$

Näherungsweise ist $e \approx 2,71$.

- Anmerkung: Man beachte, daß speziell die Rechenregeln $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ und $e^a/e^b = e^{a-b}$ sowie $(e^a)^b = e^{ab}$ gelten.

- Definition

Es sei $b > 0$ und $b \neq 1$. Die Umkehrfunktion zu $y = b^x$ heißt **Logarithmus zur Basis b** , geschrieben $f(x) = \log_b x$. Der Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $D(f) = (0, \infty)$.

Die Umkehrfunktion zur e -Funktion wird als **natürlicher Logarithmus** bezeichnet und $f(x) = \log_e x = \ln x$ geschrieben.

- Anmerkung: Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei $b > 0$ und $b \neq 1$ sowie $x, x_1, x_2 > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ sei.

$$\begin{aligned}\log_b(x_1 \cdot x_2) &= \log_b x_1 + \log_b x_2 \\ \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_b x_1 - \log_b x_2 \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x\end{aligned}$$

Ferner ist $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$ sowie $b^{\log_b x} = x$ und $\log_b b^x = x$.

- Anmerkung: Besonders oft wird die Beziehung

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln x}$$

verwendet, die für $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

- Definition

Wir definieren die **Winkelfunktionen** (auch **trigonometrische Funktionen** genannt) Sinus, Cosinus und Tangens geometrisch am Einheitskreis.

- Skizze

- Gradmaß und Bogenmaß.

- Anmerkung: Es ist $\sin(30^\circ) = 1/2$ sowie $\sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$ und $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$. Durch Symmetrieüberlegungen kann man dies auf andere Winkel und auf die Cosinusfunktion übertragen.

- Satz

Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

- Satz (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

- Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ (} 2\pi\text{-periodisch)}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ (} 2\pi\text{-periodisch)}$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos x = 0\} \text{ (} \pi\text{-periodisch)}$$

- Symmetrie

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

- Nullstellen

$$\sin(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\cos(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x_n) = 0$$

- Pole

$$\tan(x_n) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x_n) = 0$$