Vektoren 3

- Definition (Vektorprodukt)

  Es seien $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Ferner sei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Als ***Vektorprodukt*** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnen wir den Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit

  1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$,
  2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$,
  3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

- Anmerkung: Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

- Beispiele: Drehmoment, Drehimpuls, Lorentzkraft.

- Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts)

  Für $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

  (a) Distributivität: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,

  (b) Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

  (c) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{b})$.

- Beweis

- Anmerkung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ. Gegenbeispiel.

- Satz

  Für $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

  $$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ oder } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

- Beweis

- Anmerkung: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen ***kollinear***, falls $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ist.

- Beispiele, speziell mit kartesischen Einheitsvektoren.
- Satz (Berechnung des Vektorprodukts aus den Vektorkoordinaten)

  Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\, \vec{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, \vec{e}_z \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Beweis
- Beispiele:
  - Flächeninhalt eines Dreiecks;
  - Lorentzkraft auf ein Elektron.