

Vektoren 2

- Definition (Einheitsvektor)

Ein Vektor $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Einheitsvektor**, wenn $|\vec{e}| = 1$ ist, d.h. wenn \vec{e} die Länge 1 hat.

- Anmerkung: Zu $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

der Einheitsvektor in Richtung von \vec{a} . Wir verwenden die Schreibweise $\vec{e}_{\vec{a}}$.

- Beispiele:

- Zahlenbeispiel;
- Gravitationskraft zwischen zwei Massen.

- Definition (kartesische Einheitsvektoren)

Die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir als **kartesische Einheitsvektoren**.

Die Koordinatendarstellung ist im \mathbb{R}^2

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im \mathbb{R}^3

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Anmerkung (Komponentendarstellung von Vektoren)

Ein Vektor \vec{a} kann mit Hilfe der kartesischen Einheitsvektoren zerlegt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$$

Die Vektoren $a_x \vec{e}_x$ u.s.w. heißen die **vektoriellen Komponenten** von \vec{a} .

- Definition (Skalarprodukt)

Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ oder $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Ferner sei φ der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel. Wir bezeichnen die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

als **Skalarprodukt** von \vec{a} und \vec{b} .

- Anmerkung: Für φ gilt $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.
- Veranschaulichung mit Projektionen.
- Beispiel: Verschiebungsarbeit.
- Satz (Eigenschaften des Skalarprodukts)

Die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} seien alle aus dem \mathbb{R}^2 oder alle aus dem \mathbb{R}^3 . Dann gilt

- (a) Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- (b) Distributivität: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
- (c) $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Beweis
- Satz

Für $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (beide aus \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3) gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b}.$$

- Beweis
- Anmerkung: Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus dem \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 , die senkrecht aufeinander stehen, heißen **orthogonal**.
- Beispiel: kartesische Einheitsvektoren.
- Satz (Berechnung des Skalarprodukts aus den Vektorkoordinaten)

- (a) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

(b) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Beweis

- Satz (Winkel zwischen zwei Vektoren)

Es sei $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ (beide aus \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3). Dann ist

$$\arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

- Beispiel