Aufgabe 1

Welche Eliminationsmatrix E_{ij} muß mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

multipliziert werden, damit sich eine obere Dreiecksmatrix ergibt? Wie sieht damit die LU-Zerlegung von A aus?

Lösung: In der Matrix A ist nur der Eintrag $a_{32} = 6$ zu eliminieren, weil wir in der ersten Spalte von A bereits $a_{21} = 0$ und $a_{31} = 0$ haben. Zur Elimination von a_{32} wird als Pivotelement $a_{22} = 2$ genommen, und wir erhalten als Multiplikator

$$\ell_{32} = \frac{\text{zu eliminierendes Element}}{\text{Pivotelement}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Mit anderen Worten: das dreifache der zweiten Zeile muß von der dritten Zeile abgezogen werden.

Wir erhalten also die Eliminationsmatrix

$$E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\ell_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Multiplikation $E_{32}A$ liefert die obere Dreiecksmatrix U durch

$$E_{32}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = U.$$

Multiplikation von links mit E_{32}^{-1} gibt $A = E_{32}^{-1}U$, und in diesem Spezialfall, in dem die obere Dreiecksgestalt wird bereits durch Multiplikation mit einer einzigen Eliminationsmatrix erreicht wird, ist dann $L = E_{32}^{-1}$.

Wir wissen aus der Vorlesung, daß sich bei E_{32}^{-1} gegenüber E_{32} lediglich das Vorzeichen and der Stelle $(3, 2)$ ändert, so daß

$$E_{32}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Die Faktorisierung $A = LU$ der Matrix A hat somit die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die LU-Zerlegungen der folgenden Matrizen (es soll kein Zeilentausch durchgeführt werden):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 12 & 11 & 16 \\ -8 & 4 & -40 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 21 & -11 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch die LDU-Zerlegungen an.

Sie können Ihre Faktorisierungen überprüfen, indem Sie die entstandenen Matrizenprodukte ausrechnen; dann muß ja wieder die Ausgangsmatrix entstehen.

Lösung: Mit dem Gauß-Algorithmus bringen wir die Matrix A auf eine obere Dreiecksgestalt.

3	2	-8	
6	5	-21	$-2 \cdot$ (Zeile 1), also $\ell_{21} = 2$
-9	-1	6	$-(-3) \cdot$ (Zeile 1), also $\ell_{31} = -3$
3	2	-8	
0	1	-5	
0	5	-18	$-5 \cdot$ (Zeile 2), also $\ell_{32} = 5$
3	2	-8	
0	1	-5	
0	0	7	

Als LU-Zerlegung von A ergibt sich damit

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

und als LDU-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe kann man die Produkte auf den rechten Seiten ausmultiplizieren und dann vergleichen, ob dabei wirklich die linke Seite als Ergebnis entsteht.

Entsprechend wie oben die Matrix A, bringen wir nun die Matrix B mit dem Gauß-Algorithmus auf eine obere Dreiecksgestalt.

$$\begin{array}{rrrl}
4 & 3 & 7 & \\
12 & 11 & 16 & \quad -3\cdot(\text{Zeile } 1),\ \text{also } \ell_{21}=3 \\
-8 & 4 & -40 & \quad -(-2)\cdot(\text{Zeile } 1),\ \text{also } \ell_{31}=-2 \\
\hline
4 & 3 & 7 & \\
0 & 2 & -5 & \\
0 & 10 & -26 & \quad -5\cdot(\text{Zeile } 2),\ \text{also } \ell_{32}=5 \\
\hline
4 & 3 & 7 & \\
0 & 2 & -5 & \\
0 & 0 & -1 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

Die LU-Zerlegung von B ist also

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 12 & 11 & 16 \\ -8 & 4 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und als LDU-Zerlegung haben wir

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 12 & 11 & 16 \\ -8 & 4 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Probe geschieht durch Ausmultiplizieren der Produkte auf den rechten Seiten und Vergleich mit der linken Seite.

Bei der 2×2-Matrix C ist die Rechnung kürzer, ansonsten aber entsprechend der Rechnung bei A und B. Zunächst wird mit dem Gauß-Algorithmus eine obere Dreiecksmatrix erzeugt.

$$\begin{array}{rrl}
7 & -5 & \\
21 & -11 & \quad -3\cdot(\text{Zeile } 1),\ \text{also } \ell_{21}=3 \\
\hline
7 & -5 & \\
0 & 4 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

Die LU-Zerlegung von C ist somit

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 21 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und als LDU-Zerlegung bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 21 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe wird jeweils die rechte Seite ausmultipliziert und mit der Matrix C auf der linken Seite verglichen.

Aufgabe 3

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -37 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe einer LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix.

Ersetzen Sie dann die rechte Seite durch $\vec{b} = (15, 52, 37)^T$ und lösen Sie das neue lineare Gleichungssystem mit den zuvor berechneten Matrizen L und U.

Machen Sie in beiden Fällen die Probe, indem Sie die berechneten Lösungen in das lineare Gleichungssystem einsetzen. Vergleichen Sie den Lösungsweg über die LU-Zerlegung mit unserem Lösungsschema, bei dem beide Seiten gleichzeitig bearbeitet werden und auf der linken Seite eine Einheitsmatrix erzeugt wird.

Lösung: Wir erhalten die Lösung eines LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ durch

1. die LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A, wodurch $LU\vec{x} = \vec{b}$ entsteht, und

2. das Lösen der beiden Dreieckssysteme $L\vec{c} = \vec{b}$ und $U\vec{x} = \vec{c}$.

Als Zerlegung $A = LU$ der Matrix A haben wir

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Damit lösen wir das untere Dreieckssystem $L\vec{c} = \vec{b}$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -37 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} c_1 = 10, & & \\ 2c_1 + c_2 = 20, & \text{also} & c_2 = 20 - 2 \cdot 10 = 0, \\ -3c_1 + 5c_2 + c_3 = -37, & \text{also} & c_3 = -37 + 3 \cdot 10 - 5 \cdot 0 = -7. \end{array}$$

Somit ist

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Schließlich lösen wir das obere Dreieckssystem $U\vec{x} = \vec{c}$, also

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{array}{lll} 7x_3 = -7, & \text{also} & x_3 = -1, \\ 1x_2 - 5x_3 = 0, & \text{also} & x_2 = 0 + 5 \cdot (-1) = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 10, & \text{also} & x_1 = (10 - 2 \cdot (-5) + 8 \cdot (-1)) : 3 = 4. \end{array}$$

Die Lösung des LGS ist somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe wird das Lösungstripel in das LGS eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 8 \cdot (-1) & = & 12 - 10 + 8 = 10 \\ 6 \cdot 4 + 5 \cdot (-5) - 21 \cdot (-1) & = & 24 - 25 + 21 = 20 \\ -9 \cdot 4 - 1 \cdot (-5) + 6 \cdot (-1) & = & -36 + 5 - 6 = -37 \end{array}$$

Die Probe geht auf.

Wenn wir das LGS mit unserem bekannten Lösungsschema bearbeiten, sehen wir, daß der Vektor $\vec{c}$ dann auftritt, wenn die linke Seite auf die obere Dreiecksgestalt gebracht ist. Die Rechenoperationen zur Bestimmung von $\vec{c}$ sind in beiden Fällen gleich und kommen nur in unterschiedlicher Reihenfolge vor.

3	2	−8	10	
6	5	−21	20	−2(Zeile 1)
−9	−1	6	−37	+3(Zeile 1)
3	2	−8	10	
0	1	−5	0	
0	5	−18	−7	$-5 \cdot$ (Zeile 2)
3	2	−8	10	
0	1	−5	0	
0	0	7	−7	: 7
3	2	−8	10	$+8 \cdot$ (Zeile 3)
0	1	−5	0	$+5 \cdot$ (Zeile 3)
0	0	1	−1	

3	2	0	2	$-2 \cdot$ (Zeile 2)
0	1	0	-5	
0	0	1	-1	
3	0	0	12	$: 3$
0	1	0	-5	
0	0	1	-1	
1	0	0	4	
0	1	0	-5	
0	0	1	-1	

Der Vorteil der LU-Zerlegung zeigt sich, wenn das LGS für verschiedene rechte Seiten gelöst werden soll.

Wir ändern die rechte Seite ab und lösen das LGS

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -21 \\ -9 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 52 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

Da wir die LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A bereits kennen, können wir sofort die Gleichung $L\vec{c} = \vec{b}$ lösen. In Kurzschreibweise ist dies das folgende LGS.

1	0	0	15
2	1	0	52
-3	5	1	37

Durch Auflösen von oben nach unten ergibt sich $c_1 = 15$, $c_2 = 22$ und $c_3 = -28$. Damit wird $U\vec{x} = \vec{c}$ gelöst, das im folgenden in Kurzschreibweise angegeben wird.

3	2	-8	15
0	1	-5	22
0	0	7	-28

Durch Auflösen von unten nach oben bekommt man $x_1 = -7$, $x_2 = 2$ sowie $x_3 = -4$, als Spaltenvektor geschrieben also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Probe erfolgt durch Einsetzen in das LGS. Der Weg über unser altes Lösungsschema wird hier nicht noch einmal vorgeführt, er verläuft wie im ersten Teil der Aufgabe.