FH Gießen-Friedberg, FB 06 (MNI) Lösungen zu Übungsblatt 9
Lineare Algebra 19. Dezember 2008
Prof. Dr. H.-R. Metz

Aufgabe 1
Was muß für die Konstante k gelten, damit zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

eine inverse Matrix A^{-1} existiert?

Lösung: Zu einer Matrix A existiert eine inverse Matrix genau dann, wenn die Determinante von A ungleich Null ist. (Beachten Sie, daß wir den Begriff „inverse Matrix“ nur für quadratische Matrizen definiert haben. Wir können also immer die Determinante bilden.)

1. Lösungsweg: Wir berechnen die Determinante von A, und schauen, für welche Werte von k sie ungleich Null ist.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & k & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -(k-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15(k-1).$$

Dabei wurde die Determinante zunächst vereinfacht, indem Zeile 2 von Zeile 1 abgezogen wurde. Dann wurde die Determinante durch Entwicklung nach der 1. Zeile berechnet.

Aus der Bedingung

$$\det A \neq 0$$

folgt

$$-15(k-1) \neq 0,$$

und das ist genau dann erfüllt, wenn

$$k \neq 1$$

ist. Also muß $k \neq 1$ gelten, damit zu der Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} existiert.

2. Lösungsweg: Ein kürzerer Lösungsweg führt über die folgende Überlegung:

$$\det A \neq 0$$

gilt genau dann, wenn die Zeilenvektoren von A linear unabhängig sind. Für $k = 1$ sind aber die ersten beiden Zeilenvektoren von A identisch. Lineare Unabhängigkeit haben wir somit für $k \neq 1$. Das ist also die Bedingung, die unsere Aufgabe löst.

(Eigentlich sind noch ein paar zusätzliche Überlegungen nötig. Es muß gezeigt werden, daß alle drei Zeilenvektoren für $k \neq 1$ linear unabhängig sind. Wären sie linear abhängig, wäre $\det A = 0$. Da k nur an einer Stelle von A vorkommt, führt $\det A = 0$ auf eine Gleichung, die eine eindeutige Lösung für k liefert. Nur für diesen einen Wert von k sind die Zeilenvektoren linear abhängig. Wir haben aber bereits gesehen, daß dies der Wert 1 ist. Für alle anderen Werte von k, also für $k \neq 1$ müssen die Zeilenvektoren linear unabhängig sein.)

Aufgabe 2

Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix}$$

ist unter welchen Bedingungen invertierbar?

Lösung: Wir haben in der Vorlesung mehrere Bedingungen für die Invertierbarkeit einer Matrix gefunden. Zu einer quadratischen Matrix existiert eine inverse Matrix genau dann, wenn

- die Determinante der Matrix ungleich Null ist,
- die Zeilenvektoren der Matrix linear unabhängig sind,
- die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind.

Wir arbeiten mit der Bedingung, mit der wir am einfachsten zum Ziel kommen.

(a) Die Matrix A ist eine obere Dreiecksmatrix. Ihre Determinante ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente,

$$\det A = a \cdot d \cdot f.$$

Es gilt

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow (a \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge f \neq 0).$$

Unter dieser Bedingung für a, d und f ist A invertierbar. Insbesondere ist die Invertierbarkeit unabhängig von den Werten von b, c und e.

(b) Die Matrix B ist nicht invertierbar, egal welchen Wert a hat, da Zeile 1 und Zeile 2 linear abhängig sind. (Der 2. Zeilenvektor ist gleich dem 1. Zeilenvektor multipliziert mit 2.)

(c) Der 1. und der 3. Spaltenvektor der Matrix C sind linear unabhängig. Alle drei Spaltenvektoren von C sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für beliebige } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$$

gilt, und das ist die Bedingung für die Invertierbarkeit von C.

Aufgabe 3
Welche der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 0,25 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

ist zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

invers?

Lösung: Die Aufgabe kann einfach durch Nachrechnen gelöst werden. Wir bilden die Produkte AB, AC und AD und schauen, in welchem Fall die Einheitsmatrix entsteht.

(a) Das Produkt AB.

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0,25 & 5 \\ & & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0,5 & \dots \\ 5 & 0,25 & \dots & \dots \end{array}$$

Verwendet man das Multiplikationsschema wie hier, so braucht man nicht weiter zu rechnen, da die Einheitsmatrix schon nicht mehr entstehen kann. (Die Einheitsmatrix hat eine 1 an der ersten Position der ersten Zeile.)

(b) Das Produkt AC.

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2,55 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt AC ist ungleich der Einheitsmatrix, also ist C nicht invers zu A.

(c) Das Produkt AD.

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier entsteht die Einheitsmatrix. Also ist D invers zu A, d.h.

$$A^{-1} = D.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit dem Verfahren von Gauß-Jordan die inverse Matrix A^{-1} zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie die Probe.

Lösung:

1	2	1	0	
3	4	0	1	$-3 \cdot$ (Zeile 1)
1	2	1	0	
0	-2	-3	1	$: (-2)$
1	2	1	0	$-2 \cdot$ (Zeile 2)
0	1	$3/2$	$-1/2$	
1	0	-2	1	
0	1	$3/2$	$-1/2$	

Das Verfahren von Gauß-Jordan liefert

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Die zur Probe durchgeführte Multiplikation AA^{-1}

		-2	1
		$3/2$	$-1/2$
1	2	1	0
3	4	0	1

liefert die Einheitsmatrix.

Aufgabe 5

Berechnen Sie zur folgenden Matrix A die inverse Matrix A^{-1} mit dem Verfahren von Gauß-Jordan. Machen Sie die Probe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1	1	0	1	0	0	
1	1	1	0	1	0	$-$(Zeile 1)
0	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	vertauschen mit Zeile 3
0	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	0	
0	1	1	0	0	1	$-$(Zeile 3)
0	0	1	-1	1	0	
1	1	0	1	0	0	$-$(Zeile 2)
0	1	0	1	-1	1	
0	0	1	-1	1	0	
1	0	0	0	1	-1	
0	1	0	1	-1	1	
0	0	1	-1	1	0	

Die zu A inverse Matrix ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe wird das Produkt

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

berechnet. Die Probe geht auf.