Aufgabe 1
Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Lösung: Es ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt bekommen wir damit

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
= & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 \cdot \left[- \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \right] \\
= & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 + 7a \\ -7b \\ -49 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} -11 + 7a \\ 7 - 7b \\ -46 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Welche der Produkte AB, BA, AC, CA, BC und CB können mit den folgenden Matrizen gebildet werden? Berechnen Sie diese Produkte.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Ein Produkt aus zwei Matrizen kann dann gebildet werden, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. In dieser Aufgabe können also die Produkte AB, CA, BC und CB berechnet werden.

(a) Das Produkt AB.

Das Produkt kann zum Beispiel mit Hilfe des folgenden Schemas berechnet werden.

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 3 & 0 & -1 \\ & & -4 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 0 + 2\cdot 5 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 4 & 0 & 4\cdot 3 + 0\cdot(-4) & 4\cdot 0 + 0\cdot 5 & 4\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{array}$$

Mit ausgeführten Rechnungen bekommen wir das Schema:

$$\begin{array}{cc|rrr} & & 3 & 0 & -1 \\ & & -4 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 & -5 & 10 & 3 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & -4 \end{array}$$

Also gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ 12 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Das Produkt CA.

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 20 \\ 4 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) Das Produkt BC.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 17 \\ -46 & -17 \end{pmatrix}$$

(d) Das Produkt CB.

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -13 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Produkte AB und BA mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Für das Produkt AB bekommen wir

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -12 \\ 23 & 7 \end{pmatrix},$$

und für das Produkt BA ergibt sich

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -34 \\ -3 & 28 \end{pmatrix}.$$

Das Beispiel zeigt, daß die Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplikation von Matrizen wesentlich ist. Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ.

Aufgabe 4

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

seien gegeben. Berechnen Sie BA, $A^T B$ und $(BA)^T$. Kann man etwas über das Produkt $A^T B^T$ sagen? Berechnen Sie $A^T B^T$.

Lösung:

(a) Das Produkt BA.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ 0 & -17 & 15 \end{pmatrix}$$

(b) Das Produkt $A^T B$.

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 12 \\ 31 & -11 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrix $(BA)^T$ ist die Transponierte der oben berechneten Matrix BA, ergibt sich also unmittelbar aus BA durch Vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$(BA)^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -5 & -17 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Für ein Produkt XY aus Matrizen X und Y gilt

$$(XY)^T = Y^T X^T.$$

Für $(BA)^T$ folgt somit

$$(BA)^T = A^T B^T.$$

Also kennen wir das Ergebnis der Multiplikation $A^T B^T$ bereits. Zur Probe kann man es noch einmal aus den Matrizen A^T und B^T berechnen.

$$A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -5 & -17 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$