

Aufgabe 1

Die Menge der n -dimensionalen Vektoren \mathbb{R}^n wird zu einem metrischen Raum, wenn die Entfernung zwischen zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ durch

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|$$

definiert wird (siehe Vorlesung). Bei diesem Abstandsbegriff spricht man von der euklidischen Metrik; anschaulich ist hierbei die Länge der „Luftlinie“ gleich der Entfernung zwischen zwei Punkten.

In einer Stadt mit rechtwinklig verlaufenden Straßenzügen bietet sich aber ein anderer Abstandsbegriff an:

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|.$$

- Machen Sie sich klar, was diese Definition anschaulich im zwei- und dreidimensionalen Raum bedeutet.
- Machen sie sich anschaulich im zweidimensionalen Raum klar, daß $d(\vec{a}, \vec{b})$ alle drei Eigenschaften einer Metrik (siehe Vorlesung) besitzt.
- Zeigen Sie formelmäßig, daß durch die Definition von $d(\vec{a}, \vec{b})$ ein metrischer Raum entsteht, d.h. daß die drei Eigenschaften einer Metrik erfüllt sind. (Hinweis: Für reelle Zahlen gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$. Was folgt damit für $|a_i - b_i| = |a_i - c_i + c_i - b_i|$?)

Aufgabe 2

Mit Hilfe der Vektorrechnung kann man versuchen, die inhaltliche Ähnlichkeit von Dokumenten zu erfassen. Als Beispiel betrachten wir drei Texte, die aus Fabeln von Aesop stammen. Die Tabelle enthält alle Substantive, die in den drei Texten vorkommen, sowie die Häufigkeiten mit denen die Substantive in den einzelnen Texten auftreten. Insgesamt haben wir 26 Substantive.

Die drei Texte sollen nun durch 26-dimensionale Vektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 und \vec{v}_3 beschrieben werden, in denen die Häufigkeiten der Substantive stehen. Als Spaltenvektoren dargestellt hat man nichts anderes als die entsprechenden Spalten der Tabelle.

| Substantive | Text 1 | Text 2 | Text 3 |
|----------------|--------|--------|--------|
| Abend | | | 1 |
| Bauer | 1 | | 1 |
| Besitzer | | 1 | |
| Bitte | 1 | | |
| Esel | 3 | 3 | 3 |
| Fell | | 1 | |
| Freund | | | 1 |
| Futter | | | 1 |
| Hartherzigkeit | | 1 | |
| Haut | | 1 | |
| Herr | | 1 | |
| Herz | | | 1 |
| Kost | | | 1 |
| Kraft | 1 | | |
| Last | 1 | 3 | 2 |
| Markt | 1 | | |
| Morgen | | | 1 |
| Mühe | | 1 | |
| Pferd | 3 | 2 | |
| Rat | | | 1 |
| Schläge | | | 1 |
| Strecke | 1 | | |
| Tag | | | 3 |
| Teil | 2 | 1 | |
| Tod | | 1 | |
| Ziege | | | 2 |

- (a) Der Abstand $d(\vec{a}, \vec{b})$ zweier n -dimensionaler Vektoren wird bei der euklidischen Metrik durch

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|$$

definiert.

Berechnen Sie mit der euklidischen Metrik die Entfernungen $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ und $d(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ sowie $d(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Welche beiden Texte sind am „ähnlichsten“ im Sinne dieser Metrik?

- (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 , den Winkel zwischen \vec{v}_1 und \vec{v}_3 , und schließlich den Winkel zwischen \vec{v}_2 und \vec{v}_3 . Wie verhält es sich mit der „Ähnlichkeit“ der drei Texte, wenn man den Winkel zwischen den Vektoren als Maß nimmt, also von größerer Ähnlichkeit bei kleinerem Winkel spricht?

- (c) Um die Entfernung eines Vektors $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ von einem Vektor $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ festzulegen, muß man nicht zwingend die euklidischen Metrik verwenden. Mit der Definition

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|$$

erhält man eine andere Metrik, d.h. einen anderen Abstandsbegriff. Berechnen Sie mit dieser Metrik die Entfernungen $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $d(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ sowie $d(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Was folgt für die „Ähnlichkeit“ der Texte im Sinne dieser Metrik?

Die verwendeten Texte stammen aus Fabeln von Aesop¹. Text 1 besteht aus den drei ersten Absätzen der Fabel „Das Pferd und der Esel“. Text 2 besteht aus dem vierten und fünften Absatz der gleichen Fabel. Text 3 enthält die ersten drei Absätze der Fabel „Der Esel und die Ziege“.

Text 1:

Ein Bauer trieb ein Pferd und einen Esel, beide gleichmäßig beladen, zu Markte. Als sie schon eine gute Strecke vorwärts gegangen waren, fühlte der Esel seine Kräfte abnehmen. „Ach“, bat er das Pferd kläglich: „Du bist viel größer und stärker als ich, und doch hast du nicht schwerer zu tragen, nimm mir einen Teil meiner Last ab, sonst erliege ich.“

Hartherzig schlug ihm das Pferd seine Bitte ab: „Ich habe selbst meinen Teil, und daran genug zu tragen.“

Keuchend schleppte sich der Esel weiter, bis er endlich erschöpft zusammenstürzte.

Text 2:

Vergeblich hieb der Herr auf ihn ein, er war tot. Es blieb nun nichts weiter übrig, als die ganze Last des Esels dem Pferde aufzupacken, und um doch etwas von dem Esel zu retten, zog ihm der Besitzer das Fell ab und legte auch dieses noch dem Pferde oben auf.

Zu spät bereute dieses seine Hartherzigkeit. „Mit leichter Mühe“, so klagte es, „hätte ich dem Esel einen kleinen Teil seiner Last abnehmen und ihn vom Tode retten können. Jetzt muß ich seine ganze Last und dazu noch seine Haut tragen.“

Text 3:

Ein Bauer hatte einen Esel und eine Ziege. Weil nun der Esel sehr viel arbeiten und große Lasten tragen mußte, erhielt er ein reichlicheres und besseres Futter als die Ziege.

¹Quelle: Projekt Gutenberg-DE, <http://gutenberg.spiegel.de/>

Diese beneidete den Esel, und um ihn um die bessere Kost zu bringen, oder doch wenigstens ihm Schläge einzutragen, sprach sie eines Tages zu ihm:

„Höre, lieber Freund! Oft schon habe ich dich von Herzen bedauert, daß du Tag für Tag die schwersten Lasten tragen und vom Morgen bis Abend arbeiten mußt; ich möchte dir wohl einen guten Rat geben.“