Aufgabe 1

Für welchen Wert von x liegen die Vektoren $\vec{a} = (x;3;2)$, $\vec{b} = (4;0;2)$ und $\vec{c} = (-1;1;-2)$ in einer Ebene?

Lösung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene, wenn ihr Spatprodukt gleich Null ist. Aus

$$\begin{aligned}
[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] &= \begin{vmatrix} x & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3(-8+2) - (2x-8) = 18 - 2x + 8 = 26 - 2x = 0
\end{aligned}$$

folgt $2x = 26$. Also ist $x = 13$ die Lösung.

Aufgabe 2

Die beiden Geraden

$$\vec{r}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

seien gegeben. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

Lösung: Wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben, muß es reelle Werte für λ und μ so geben, daß $\vec{r}_1(\lambda) = \vec{r}_2(\mu)$ ist, also

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

gilt. Dies führt auf drei Gleichungen für die beiden Unbekanten λ und μ.

$$\begin{aligned} 7+\lambda &= 9-3\mu \\ 6+2\lambda &= -10+4\mu \\ -7-3\lambda &= 15-5\mu \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \lambda+3\mu &= 2 \\ 2\lambda-4\mu &= -16 \\ -3\lambda+5\mu &= 22 \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit (-2) und Addition zur zweiten Gleichung ergibt $-10\mu = -20$, und somit $\mu = 2$. Eingesetzt in die erste Gleichung liefert das $\lambda = -4$.

Jetzt muß überprüft werden, ob diese Werte für μ und λ auch die dritte Gleichung erfüllen. Ist das der Fall, schneiden sich die beiden Geraden, andernfalls haben sie keinen gemeinsamen Punkt.

In unserem Fall wird die dritte Gleichung erfüllt, wie man durch Einsetzen unmittelbar sieht. Also gibt es einen Schnittpunkt, und wir bekommen ihn durch

$$\vec{r}_1(-4) = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 6-8 \\ -7+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

oder durch entsprechendes Einsetzen von $\mu = 2$ in $\vec{r}_2(\mu)$.

Also ist $S = (3\,|\,-2\,|\,5)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren, wir bezeichnen sie mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bekommen wir über die Gleichung des Skalarprodukts

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Wir führen zunächst einige Nebenrechnungen durch und erhalten

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -3+8+15 = 20$$

sowie für die Beträge

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

und
$$|\vec{b}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$
und für deren Produkt
$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}.$$
Insgesamt bekommen wir dann
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{20}{10\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$
und daraus
$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \approx 40,9°.$$

Aufgabe 3

Eine Gerade gehe durch die beiden Punkte $A(1\,|\,0\,|\,4)$ und $B(3\,|\,5\,|\,2)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(3\,|-5\,|-2)$ von dieser Geraden.

Lösung: Es sei d der Abstand des Punktes P von der Geraden. Für d wurde in der Vorlesung die Formel
$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$
hergeleitet. Wir berechnen zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ durch
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$
und
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$
Für das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$ ergibt sich
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & 2 & 2 \\ \vec{e}_y & 5 & -5 \\ \vec{e}_z & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$
und sein Betrag ist
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = 4 \cdot \sqrt{129}\,.$$

Ferner ist

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit der Formel für d das Endergebnis

$$d = \frac{4\sqrt{129}}{\sqrt{33}} = 7{,}908568\ldots,$$

das man auch ohne Taschenrechner durch

$$d = \frac{4\sqrt{129}}{\sqrt{33}} = 4\sqrt{\frac{129}{33\cdot 4}\cdot 4} = 4\sqrt{\frac{129}{132}\cdot 4} \approx 8$$

abschätzen kann.

Aufgabe 4

Eine Ebene schneidet die x-Achse bei 4, die y-Achse bei 3 und die z-Achse bei 7. Welchen senkrechten Abstand hat die Ebene vom Ursprung des Koordinatensystems?

Lösung: Durch die Schnittpunkte mit den drei Achsen sind drei Punkte aus der Ebene gegeben, wir bezeichnen sie mit A, B und C. Wir haben also $A = (4\,|\,0\,|\,0)$ sowie $B = (0\,|\,3\,|\,0)$ und $C = (0\,|\,0\,|\,7)$.

Um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu berechnen, brauchen wir einen Normalenvektor auf der Ebene. Den wiederum berechnen wir mit einem Kreuzprodukt aus zwei Vektoren, die in der Ebene liegen.

Beispielsweise liegen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ in der Ebene, und $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ist eine Normalenvektor. Mit den konkreten Zahlen ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorprodukt der beiden Vektoren ergibt sich

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & -4 & -4 \\ \vec{e}_y & 3 & 0 \\ \vec{e}_z & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen diesen Vektor mit $\vec{n}$. Um den Abstand d des Ursprungs von der Ebene zu bekommen, müssen wir nun einen Vektor vom Ursprung zu einem Punkt der Ebenen nehmen, zum Beispiel $\overrightarrow{0A}$, auf die Richtung von $\vec{n}$ projizieren und die Länge der Projektion berechnen. Dies geschieht durch

$$d = \frac{|\overrightarrow{0A} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{84}{\sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2}} \approx 2,27.$$

Man beachte, daß sich 84 nicht nur aus

$$\overrightarrow{0A} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ergibt, sondern auch aus $\overrightarrow{0B} \cdot \vec{n}$ und $\overrightarrow{0C} \cdot \vec{n}$. Jeder Vektor, der vom Ursprung auf die Ebene reicht, führt bei der Berechnung von d zum selben Ergebnis.