Aufgabe 1

Berechnen Sie das Vektorprodukt

(a) der Vektoren $\vec{a} = (7; 2; 3)$ und $\vec{b} = (5; -4; 1)$,

(b) der Vektoren $\vec{a} = (7; 2; 3)$ und $\vec{b} = (1; 1; 0)$,

(c) der Vektoren $\vec{a} = (a_1; a_2; 0)$ und $\vec{b} = (b_1; b_2; 0)$.

Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Vektorprodukts kann direkt verwendet werden, sie wurde in der Vorlesung hergeleitet. Man kann aber auch von einer Determinante ausgehend das Vektorprodukt berechnen. Die Schreibweise ist übersichtlich und leicht zu behalten. Für $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ und $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

oder

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} .$$

Beide Determinanten liefern das selbe Ergebnis, die zweite hat den Vorteil, daß die Anordnung der Vektorkoordinaten mit der Anordnung in den Spaltenvektoren optisch übereinstimmt.

(a) Mit $\vec{a} = (7; 2; 3)$ und $\vec{b} = (5; -4; 1)$ ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & 7 & 5 \\ \vec{e}_y & 2 & -4 \\ \vec{e}_z & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 14 \cdot \vec{e}_x - (-8) \cdot \vec{e}_y - 38 \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -38 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(b) Für die Vektoren $\vec{a} = (7;2;3)$ und $\vec{b} = (1;1;0)$ folgt mit dem selben Rechenweg wie oben

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & 7 & 1 \\ \vec{e}_y & 2 & 1 \\ \vec{e}_z & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In unserem speziellen Fall steht also $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{b} = (1;1;0)$. Das bedeutet, daß die x- und die y-Koordinate von $\vec{a} \times \vec{b}$ gleichen Betrag und unterschiedliches Vorzeichen haben müssen, was sich ja auch in der Rechnung ergibt.

(c) Für das Vektorprodukt aus $\vec{a} = (a_1; a_2; 0)$ und $\vec{b} = (b_1; b_2; 0)$ ergibt sich

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beide in der (x,y)-Ebene liegen, ist sowohl die x-Koordinate als auch die y-Koordinate von $\vec{a} \times \vec{b}$ gleich Null. Gilt $\vec{b} = k\vec{a}$ mit einer Konstanten k, so verschwindet auch die z-Koordinate von $\vec{a} \times \vec{b}$.

Aufgabe 2

Die Punkte $A(4;-1;-3)$, $B(0;5;1)$ und C(3;4;5) bilden ein Dreieck.

(a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

(b) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Dreiecksfläche steht und die Länge 1 hat.

Lösung:

(a) Der Betrag eines Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Der Flächeninhalt F des Dreiecks, das von den Punkten A, B und C gebildet wird, ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms, das die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufspannen. Also gilt

$$F = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|.$$

Es ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

und

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & -4 & -1 \\ \vec{e}_y & 6 & 5 \\ \vec{e}_z & 4 & 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \\ -14 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt F bekommen wir dann

$$F = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{4+4+1} = 21.$$

(b) Einen Normalenvektor bezüglich der Dreiecksfläche erhalten wir mit Hilfe eines Vektorprodukts. Division durch den Betrag gibt einen Vektor der Länge 1. Also erfüllt der Vektor

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

unsere Bedingungen.