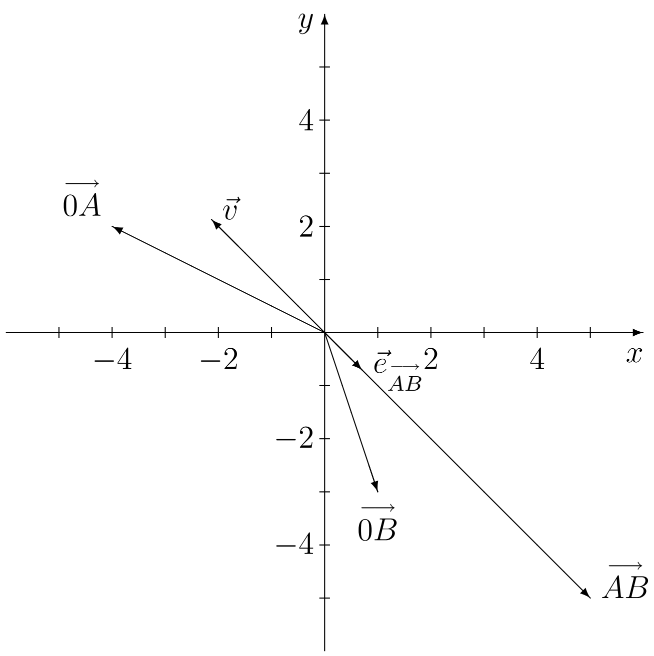
Aufgabe 1

Die Punkte $A(-4; 2)$ und $B(1; -3)$ seien gegeben. Berechnen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$, den Einheitsvektor in Richtung von $\overrightarrow{AB}$ und den Vektor mit der Länge 3, der in die dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ entgegengesetzte Richtung zeigt. Skizzieren Sie die Ortsvektoren $\overrightarrow{0A}$ und $\overrightarrow{0B}$ sowie alle berechneten Vektoren.

Lösung:



Die Ortsvektoren der Punkte A und B sind

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Um von dem Punkt A zum Punkt B zu gelangen, müssen wir 5 Längeneinheiten nach rechts und 5 nach unten gehen. Entsprechend ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Der Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ist

$$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \approx 0,71 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte dabei $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2}$.

Der Vektor $\vec{v}$ mit der Länge 3, der in die dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ entgegengesetzte Richtung zeigt, ist

$$\vec{v} = -3\,\vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = -3\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \approx 0,71\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,13 \\ 2,13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Gesucht ist der Einheitsvektor $\vec{e}$, der die zum Vektor $\vec{a} = (2; -7; 3)$ entgegengesetzte Richtung hat.

Lösung: Der Einheitsvektor in entgegengesetzter Richtung zu $\vec{a}$ ist

$$\vec{e} = -\frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} = \frac{-1}{\sqrt{4+49+9}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{62}}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Welchen Winkel schließen $\vec{a} = (2; -1; -5)$ und $\vec{b} = (3; 7; 1)$ ein?

Lösung: Wir bezeichnen den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit φ. Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

Es folgt

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6 - 7 - 5}{\sqrt{4+1+25}\,\sqrt{9+49+1}} = \frac{-6}{\sqrt{30}\,\sqrt{59}}.$$

Der Taschenrechner liefert $\varphi = 98,199\ldots^\circ \approx 98,2^\circ$.

(Übrigens läßt sich das Ergebnis sehr leicht ohne Taschenrechner abschätzen. Es ist

$$\cos(\varphi) = \frac{-6}{\sqrt{30}\,\sqrt{59}} \approx \frac{-6}{5 \cdot 8} = -\frac{6}{40} \approx -\frac{1}{7} \approx -0,14.$$

Aus einer Skizze der Cosinusfunktion sieht man: $\cos(100^\circ) \approx -0,14$. Also hat man die Abschätzung: $\varphi \approx 100^\circ$.)

Aufgabe 4

Welchen Wert muß die Konstante k haben, damit $\vec{a} = (k; -2; -5)$ orthogonal zu $\vec{b} = (3; 7; 2)$ ist?

Lösung: Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Also muß das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet und gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 3k - 14 - 10 = 0$$

gibt $3k = 24$; somit stehen die Vektoren für $k = 8$ senkrecht aufeinander.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Winkel in dem durch die Punkte $A(2; 3; 5)$, $B(4; -1; 3)$ und $C(5; -3; -1)$ gebildeten Dreieck.

Lösung: Wir arbeiten mit Methoden der Vektorrechnung und nutzen die Tatsache, daß der Winkel zwischen zwei Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren berechnet werden kann.

Die Vektoren von A nach B und von A nach C sind

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Für den Winkel α zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6 + 24 + 12}{\sqrt{24}\,\sqrt{81}} = \frac{42}{18\sqrt{6}} = \frac{21}{9\sqrt{6}}\,.$$

Damit haben wir für den ersten Winkel

$$\alpha \approx 17{,}72^\circ.$$

Der Winkel β zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ wird analog zum Winkel α berechnet. Zunächst ist

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ferner ergibt sich für den Vektor von B nach C

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2-8-8}{\sqrt{24}\,\sqrt{21}} = \frac{-18}{2\sqrt{2\cdot 3}\,\sqrt{3\cdot 7}} = \frac{-18}{6\sqrt{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Das ergibt

$$\beta \approx 143{,}30°.$$

Da die Winkelsumme im Dreieck gleich 180° ist, folgt für den dritten Winkel

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 18{,}98°.$$

Aufgabe 6

Eine Masse wird durch die Kraft $\vec{F} = (10; -4; -2)\,\mathrm{N}$ geradlinig vom Punkt $P_1 = (1; 20; 3)\,\mathrm{m}$ nach $P_2 = (4; 2; -1)\,\mathrm{m}$ verschoben.

Welche Arbeit leistet die Kraft? Welchen Winkel bildet die Kraft mit dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$?

Lösung: Der Verschiebungsvektor $\vec{s}$ ist

$$\vec{s} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{m}.$$

Die von der Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit W ist gleich dem Skalarprodukt aus $\vec{F}$ und $\vec{s}$. Es ergibt sich

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{m} = (30 + 72 + 8)\,\mathrm{Nm} = 110\ \mathrm{Nm}.$$

Es bezeichne φ den Winkel zwischen dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$. Für das Skalarprodukt aus $\vec{F}$ und $\vec{s}$ gilt

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi).$$

Löst man nach φ auf, setzt den oben berechneten Wert des Skalarprodukts ein und bestimmt die Beträge, so folgt

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{110\ \mathrm{Nm}}{\sqrt{100+16+4}\,\mathrm{N}\cdot\sqrt{9+324+16}\,\mathrm{m}}\right) \\
&= \arccos\frac{110}{\sqrt{120}\,\sqrt{349}} \\
&\approx 57{,}49^\circ.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Der Vektor $\vec{a} = (3; -2; 7)$ ist gegeben. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{b} = (14; 15; 16)$ so in eine Vektorsumme $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, daß $\vec{x}$ parallel zu $\vec{a}$ ist, und $\vec{y}$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht.

Lösung: Wir betrachten zwei Lösungswege.

1. Weg: Die Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$ ist gleich der Länge von $\vec{x}$, also gleich $|\vec{x}|$.

Andererseits ist aber der Betrag des Skalarprodukts zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich der Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$ multipliziert mit der Länge von $\vec{a}$. (Siehe Vorlesung: anschauliche geometrische Interpretation des Skalarprodukts.)

Daraus folgt

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{x}|\cdot|\vec{a}|,$$

und somit

$$|\vec{x}| = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}\cdot\vec{b}|.$$

Da $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ ist, schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel ein, der zwischen 0° und 90° liegt, und die Projektion $\vec{x}$ zeigt in die Richtung von $\vec{a}$, so daß

$$\vec{x} = |\vec{x}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

gilt. Man beachte, daß $\vec{a}/|\vec{a}|$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ ist.

Also ist

$$\vec{x} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{|42-30+112|}{(\sqrt{9+4+49}\,)^2}\cdot\vec{a} = \frac{124}{(\sqrt{62}\,)^2}\cdot\vec{a} = 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{b}$$

folgt

$$\vec{y} = \vec{b} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe kann man das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{y}$ ausrechnen; da $\vec{y}$ senkrecht auf $\vec{a}$ stehen soll, muß sich Null ergeben:

$$\vec{a} \cdot \vec{y} = 24 - 38 + 14 = 0.$$

2. Weg: Da $\vec{x}$ parallel oder antiparallel zu $\vec{a}$ ist, muß

$$\vec{x} = k\vec{a}$$

gelten. Zusammen mit $\vec{x} + \vec{y} = \vec{b}$ folgt

$$\vec{y} = \vec{b} - k\vec{a}.$$

Da $\vec{y}$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht, muß das Skalarprodukt $\vec{y} \cdot \vec{a}$ verschwinden. Damit haben wir

$$(\vec{b} - k\vec{a})\vec{a} = 0,$$

woraus sofort

$$\vec{b}\,\vec{a} - k\,\vec{a}\,\vec{a} = 0$$

folgt. Werden die Zahlen eingesetzt, bekommen wir

$$14 \cdot 3 + 15 \cdot (-2) + 16 \cdot 7 - k(3^2 + (-2)^2 + 7^2) = 0$$

und daraus $k = 2$. Also ist

$$\vec{x} = 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{y}$ folgt wie beim ersten Lösungsweg

$$\vec{y} = \vec{b} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}.$$