Matrizen 7

- Es gibt Matrizen, bei denen der Gauß-Algorithmus nicht ohne Zeilentausch durchgeführt werden kann.

  Wir vertauschen im folgenden die Zeilen einer Matrix A, indem wir eine geeignete Matrix P mit A multiplizieren und das Produkt PA bilden.

- Beispiel

- Definition

  Als ***Permutationsmatrix*** bezeichnen wir eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 enthält und sonst nur die Einträge 0 hat.

- Anmerkung:

  (a) Jede $n \times n$-Permutationsmatrix kann aus der $n \times n$-Einheitsmatrix durch Umsortieren der Zeilen gewonnen werden.

  (b) Wir bezeichnen durch P_{ij} diejenige Permutationsmatrix, die aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der Zeilen i und j entstanden ist.

- Satz

  Es gibt $n!$ verschiedene $n \times n$-Permutationsmatrizen.

- Beweis

- Beispiel: Alle 3×3-Permutationsmatrizen.

- Satz

  Durch die Multiplikation von P_{ij} mit A zum Produkt $P_{ij}A$ werden die Zeilen i und j von A miteinander vertauscht.

  Allgemein führt die Multiplikation einer Permutationsmatrix P mit einer Matrix A zu einer Matrix PA, in der die Zeilen von A umgeordnet sind.

- Beweis

- Satz (Eigenschaften von Permutationsmatrizen)
  (a) Jede Permutationsmatrix kann als Produkt von zeilenvertauschenden Permutationsmatrizen P_{ij} geschrieben werden.
  (b) Jedes Produkt von Permutationsmatrizen ist wieder eine Permutationsmatrix.
  (c) Eine Permutationsmatrix P_{ij} ist zu sich selbst invers.
  (d) Es ist $P_{ij} = P_{ij}^T$.
  (e) Ist P ein Permutationsmatrix, dann auch P^{-1}.
  (f) Es ist $P^{-1} = P^T$.
- Beweis
- LU-Zerlegung mit Zeilentausch.
  - Zeilentausch bei A, falls notwendig, und entsprechend bei den bis dahin berechneten Teilen von L und U.
  - Ansonsten Berechnung der LU-Zerlegung wie bisher.
  - Gibt LU-Zerlegung für die veränderte Matrix A, d.h.
  $$P_{kl} \dots P_{ij} A = LU.$$
  - Fassen das Produkt $P_{kl} \dots P_{ij}$ der Permutationsmatrizen durch $P = P_{kl} \dots P_{ij}$ zu einer Permutationsmatrix P zusammen und schreiben
  $$PA = LU.$$
- Anmerkung: Da $P^{-1} = P^T$ ist, folgt unmittelbar $A = P^T LU$.
- Lösen eines LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der Zerlegung $PA = LU$.
  - Umordnen der rechten Seite $\vec{b}$ durch $P\vec{b}$ entsprechend der Umordnung von A.
  - Lösen der Dreieckssysteme $L\vec{c} = P\vec{b}$ und $U\vec{x} = \vec{c}$ wie bisher.
- Beispiel
- MATLAB-Code zur Faktorisierung einer quadratischen Matrix A in der Form $PA = LU$ sowie zur Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe von P, L, U und $\vec{c}$.
- Anmerkung: Um Rundungsfehler zu reduzieren, wird in der Praxis eine Spalte nach dem größtmöglichen Pivotelement abgesucht und dann gegebenenfalls getauscht. Dadurch kann ein Zeilentausch auch dann auftreten, wenn es prinzipiell nicht nötig wäre.

  Es ist sehr nützlich, mit MATLAB oder der freien Software Octave zu experimentieren, und diese Effekte zu beobachten.