Matrizen 6

- Idee: Die grundlegende Operation beim Gauß-Algorithmus ist das Subtrahieren des Vielfachen einer Zeile von einer anderen Zeile; diese Operation kann mit Hilfe einer Matrizenmultiplikation durchgeführt werden.

- Beispiel

- Anmerkung: Im folgenden betrachten wir nur eindeutig lösbare Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, d.h. nur invertierbare Matrizen A.

- Definition

  Eine ***Eliminationsmatrix*** E_{ij} ist eine Einheitsmatrix mit einem zusätzlichen Eintrag $(-\ell_{ij})$ unterhalb der Hauptdiagonalen in Zeile i und Spalte j.

- Anmerkung:

  (a) Die Wirkung der Eliminationsmatrix E_{ij} auf eine Matrix A kann man sich gut klarmachen, wenn man die Zeilenvektoren des Produkts $E_{ij}A$ als Linearkombinationen der Zeilenvektoren von A betrachtet.

  (b) Für den Gauß-Algorithmus setzen wir

  $$\ell_{ij} = \frac{\text{zu eliminierendes Element an der Stelle } (i,j)}{\text{Pivotelement an der Stelle } (j,j)} .$$

- Beispiel

- Satz

  Die Matrizen E_{ij} und A seien vom gleichen Typ $n \times n$. Die Multiplikation $E_{ij}A$ bewirkt, daß von der Zeile i in Matrix A das ℓ_{ij}-fache der Zeile j abgezogen wird.

- Beweis

- Satz

  Es sei A eine 3×3-Matrix. Wenn kein Zeilentausch durchgeführt werden muß, erhalten wir mit passenden Eliminationsmatrizen E_{ij} durch

  $$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

  eine obere Dreiecksmatrix U.

- Anmerkung: Für eine $n \times n$-Matrix A mit beliebigem n gilt die entsprechende Aussage. Der Satz folgt sofort aus dem Gauß-Algorithmus und dem vorherigen Satz. Der Satz gilt nicht, wenn ein Zeilentausch notwendig ist.

- Idee: Wir multiplizieren die Gleichung

  $$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

  von links mit den passenden inversen Matrizen $(E_{ij})^{-1}$ und erhalten damit für die Matrix A die Darstellung

  $$A = (E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}(E_{32})^{-1}U.$$

  Dann bezeichnen wir das Matrizenprodukt $(E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}(E_{32})^{-1}$ als Matrix L und bekommen durch

  $$A = LU$$

  die sogenannte **LU-*Zerlegung*** der Matrix A.

  Zur Umsetzung dieser Idee zeigen wir zunächst, daß die Matrizen E_{ij} invertierbar sind und die Inversen eine spezielle Gestalt haben, dann wird die Form der Matrix L untersucht.

- Beispiel zum Invertieren einer Matrix E_{ij}.

- Satz

  Zur Eliminationsmatrix E_{ij} entsteht die Inverse $(E_{ij})^{-1}$ durch Änderung des Vorzeichens an der Stelle (i, j).

- Beweis

- Beispiel zur Berechnung von $L = (E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}(E_{32})^{-1}$.

- Satz (LU-Zerlegung einer quadratischen Matrix)

  Wenn die quadratische Matrix A mit dem Gauß-Algorithmus in die obere Dreiecksmatrix U überführt werden kann, ohne daß ein Zeilentausch notwendig ist, dann ist

  $$A = LU,$$

  wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist. Alle Elemente auf der Hauptdiagonalen von L sind 1, die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen an der Stelle (i, j) sind

  $$\ell_{ij} = \frac{\text{zu eliminierendes Element an der Stelle } (i,j)}{\text{Pivotelement an der Stelle } (j,j)}.$$

  Auf der Hauptdiagonalen von U stehen die Pivotelemente.

- Beweis
- Anmerkung: Anstelle von $A = LU$ schreibt man manchmal auch $A = LDU$, wobei U eine andere Bedeutung hat als im ersten Fall; dabei ist D eine Diagonalmatrix in der die Pivotelemente stehen, und das neue U entsteht aus dem alten U, indem jede Zeile durch das Pivotelement geteilt wird, das in dieser Zeile auf der Hauptdiagonalen steht. Damit hat das neue U überall auf der Hauptdiagonalen 1 stehen.
- Beispiel
- Bedeutung der LU-Zerlegung

  Die Matrix L ist das „Gedächtnis" des Gauß-Algorithmus; sie enthält die komplette Information darüber, welche Schritte in welcher Reihenfolge durchgeführt wurden.

  Die rechte Seite $\vec{b}$ des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ wird mit den selben Schritten umgeformt. Also kann man durch die LU-Zerlegung erst die linke Seite des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ bearbeiten und dann verschiedene rechte Seiten verwenden, ohne jedesmal erneut die linke Seite umformen zu müssen. Das spart Rechenzeit!

  Den Zusammenhang zwischen den Umformungen der beiden Seiten sieht man, wenn man die Seiten gleichzeitig bearbeitet. Aus $A\vec{x} = \vec{b}$ entsteht
  $$L^{-1}A\vec{x} = L^{-1}\vec{b},$$
  und da wegen $A = LU$ die Beziehung $L^{-1}A = U$ gilt, folgt
  $$U\vec{x} = L^{-1}\vec{b}.$$
  Wir führen die Abkürzung $\vec{c} = L^{-1}\vec{b}$ ein und erhalten $\vec{c}$ als Lösung des unteren Dreieckssystems
  $$L\vec{c} = \vec{b}.$$
  Dann ergibt sich $\vec{x}$ als Lösung des oberen Dreieckssystems
  $$U\vec{x} = \vec{c}.$$
- Lösen des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit LU-Zerlegung, falls kein Zeilentausch notwendig ist:

  1. Zerlegung $A = LU$ mit dem Gauß-Algorithmus berechnen.
  2. Das untere Dreieckssystem $L\vec{c} = \vec{b}$ mit Vorwärtselimination lösen; dann durch Rücksubstitution aus $U\vec{x} = \vec{c}$ die Lösung $\vec{x}$ des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ berechnen.
- Beispiel
- MATLAB-Code zur LU-Zerlegung einer quadratischen Matrix sowie zur Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe von L, U und $\vec{c}$.