Matrizen 5

- Wir betrachten eine Anwendung der Matrizenrechnung, die in der Computergraphik eine große Rolle spielt.

- ***Homogene Koordinaten***: Geometrische Transformationen (Translation, Skalierung, Rotation) sollen einheitlich durch Matrizenmultiplikationen beschrieben werden. Damit dies möglich wird, erweitern wir die Tupel der kartesischen Koordinaten um einen Eintrag; aus den 2-Tupeln werden 3-Tupel, und aus den 3-Tupeln werden 4-Tupel.

  Der neue Eintrag hat keine anschauliche Bedeutung; er ist ein technischer Trick, um eine Verschiebung

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

  mit einer Matrizenmultiplikation

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  beschreiben zu können. Hier haben wir das Koordinatenpaar $(x \,|\, y)$ um den Eintrag 1 zu $(x \,|\, y \,|\, 1)$ erweitert (entsprechend bei $(x' \,|\, y')$). Auch eine andere Zahl als 1 kann verwendet werden.

- Kartesische und homogene Koordinaten.

  - Zweidimensional
    Es sei P ein Punkt der Ebene.
    Kartesische Koordinaten: $P = (x \,|\, y)$.
    Homogene Koordinaten: $P_h = (h \cdot x \,|\, h \cdot y \,|\, h)$ mit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.
  - Dreidimensional
    Es sei P ein Punkt des Raumes.
    Kartesische Koordinaten: $P = (x \,|\, y \,|\, z)$.
    Homogene Koordinaten: $P_h = (h \cdot x \,|\, h \cdot y \,|\, h \cdot z \,|\, h)$ mit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

  Die Darstellung von P durch homogene Koordinaten ist nicht eindeutig, es sind unterschiedliche h möglich.

- Beispiele: Umformung zwischen kartesischen und homogenen Koordinaten.
- Translation

  Ein Punkt soll in x-Richtung um die Differenz d_x und in y-Richtung um die Differenz d_y verschoben werden.

kartesische Koordinaten $(x \,|\, y)$	homogene Koordinaten $(x \,|\, y \,|\, 1)$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

- Skalierung

  Die x-Koordinate eines Punktes soll auf das s_x-fache gebracht werden, entsprechend die y-Koordinate auf das s_y-fache.

kartesische Koordinaten $(x \,|\, y)$	homogene Koordinaten $(x \,|\, y \,|\, 1)$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

  Der Nullpunkt verändert seine Lage nicht. Durch das Skalieren aller Punkte eines Bildes entsteht ein Zoomeffekt. Das Bild wird vergrößert oder verkleinert (um unterschiedliche Faktoren in x- und y-Richtung, falls $s_x \neq s_y$ ist), der Ursprung ist dabei der Fixpunkt.

  Will man einen anderen Fixpunkt F als den Koordinatenursprung haben, geht man in drei Schritten vor: 1. Translation, so daß F in den Ursprung fällt, 2. Skalierung, 3. Rücktranslation.

  Für $s = s_x = s_y$ haben wir eine *uniforme Skalierung*; $s > 1$ ist eine Streckung (Hineinzoomen), $0 < s < 1$ ist eine Stauchung (Herauszoomen). Eine uniforme Skalierung kann auch mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  beschrieben werden; hier haben wir die Situation, daß homogene Koordinaten verwendet werden, deren Zusatzkoordinate ungleich 1 ist.

- Rotation

  Ein Punkt soll um den Ursprung gedreht werden. Der Drehwinkel soll gleich α sein.

kartesische Koordinaten $(x \,|\, y)$	homogene Koordinaten $(x \,|\, y \,|\, 1)$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

  Falls die Rotationsachse nicht durch den Ursprung gehen soll, muß man 1. eine Translation des Drehzentrums in den Ursprung, 2. eine Rotation und 3. eine Rücktranslation durchführen.

- Anmerkung: Besteht eine Transformation aus mehreren Teilen (z.B. Translation, Rotation, Translation), können die betreffenden Matrizen zunächst multipliziert werden; erst dann werden Punktkoordinaten mit Hilfe der Produktmatrix umgerechnet. Das spart Rechenzeit, wenn ein Bild, das sich aus vielen Punkten zusammensetzt, transformiert wird.

- Beispiel (Rotation um eine Punkt ungleich dem Ursprung): Der Punkt $P = (5 \,|\, 2)$ soll um den Punkt $Q = (3 \,|\, 2)$ gedreht werden; der Drehwinkel soll gleich $90°$ sein.

- Anmerkung: Vorteile der homogenen Koordinaten sind u.a.
  - einheitliche Darstellung (Matrizen für alle Arten von Transformationen),
  - komplexe Transformationen werden aus einfachen aufgebaut (durch Multiplikationen von Matrizen),
  - schnelle Berechnungen (bei Zusammenfassung mehrerer Transformationen zu einer Matrix; besonders nützlich bei der Umrechnung vieler Punktkoordinaten mit denselben Transformationen),
  - leichte Umkehrung einer Transformation (mit einer inversen Matrix).