

Matrizen 4

- **Page-Ranking** bei Suchmaschinen.

Wird das Internet durchsucht, dann sollten die „besten“ Seiten am Anfang der Trefferliste stehen. Das hat Google außerordentlich gut zustande gebracht und wurde damit enorm erfolgreich. Aber warum funktioniert Google so gut? Der wesentliche Grund liegt in einem Algorithmus, der die Mathematik der Matrizenrechnung verwendet!

Die Reihenfolge der Treffer soll der Bedeutung (dem Gewicht) der Seiten entsprechen. Aber wann ist eine Seite überhaupt wichtig? Die einfache aber wesentliche Idee ist: wenn viele andere wichtige Seiten auf sie verweisen!

Drehen wir uns jetzt aber nicht im Kreis, indem wir Gewicht mit Hilfe von Gewicht definieren? Schauen wir uns das näher an.

Es sei n die Anzahl aller Seiten, die von der Suchmaschine berücksichtigt werden, also idealerweise die Anzahl aller Seiten im Netz. Ferner sei x_i mit $i = 1, \dots, n$ das Gewicht der Seite i . Wie legen wir zum Beispiel x_{77} fest? Angenommen auf die Seite 77 verweisen Links von den Seiten 58, 119, 340, 1099 und 3825. Das Gewicht der Seite 77 soll proportional zur Summe der Gewichte der auf sie zeigenden Seiten sein, also soll

$$x_{77} \sim (x_{58} + x_{119} + x_{340} + x_{1099} + x_{3825})$$

gelten. Mit dem Proportionalitätsfaktor k wird das zur Gleichung

$$x_{77} = k \cdot (x_{58} + x_{119} + x_{340} + x_{1099} + x_{3825}).$$

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Seite } j \text{ auf Seite } i \text{ verweist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Man beachte, daß eine Seite auch auf sich selbst zeigen darf.) Wir erhalten

$$x_{77} = k \cdot \sum_{j=1}^n a_{77,j} \cdot x_j$$

und daraus

$$\sum_{j=1}^n a_{77,j} \cdot x_j = \frac{1}{k} \cdot x_{77}.$$

Dies ist die Zeile 77 in einem gigantischen linearen Gleichungssystem. Mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ kann das gesamte System als

$$A\vec{x} = \frac{1}{k} \vec{x}$$

geschrieben werden. Dies ist eine **Eigenwertgleichung**. Vektoren \vec{x} , die eine solche Gleichung lösen, heißen Eigenvektoren. Der Eigenvektor, der nur positive Einträge enthält, gibt die relativen Gewichte der Seiten an.

Die Idee, auf diese Art Ranglisten zu erzeugen, gab es bereits in den 1950er Jahren. Google verwendet eine Variante dieser Methode.

- Definition (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$. (\vec{x} soll als Spaltenvektor bzw. $n \times 1$ -Matrix aufgefaßt werden.) Ferner sei λ eine Zahl (eventuell komplex). Gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

so heißt λ ein **Eigenwert** von A und \vec{x} ein zu λ gehörender **Eigenvektor** von A .

- Anmerkung: Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ sind $\lambda\vec{x}$ und \vec{x} kollinear. Ist $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dann sind also $A\vec{x}$ und \vec{x} kollinear. Die Matrix A ändert die Länge (und eventuell das Vorzeichen) von \vec{x} , dreht \vec{x} aber nicht.
- Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Es sei E die Einheitsmatrix vom gleichen Typ wie A . Aus

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda(E\vec{x}) = (\lambda E)\vec{x}$$

folgt

$$A\vec{x} - (\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

und daraus das homogene LGS

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

mit der $n \times n$ Koeffizientenmatrix $A - \lambda E$. Eine nichttriviale Lösung des LGS existiert nur, falls

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung der Matrix } A)$$

ist. Hierbei ist $\det(A - \lambda E)$ ein Polynom n -ten Grades mit der Variablen λ . Die charakteristische Gleichung hat n Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dies sind die Eigenwerte von A .

Zu jedem Eigenwert λ_i berechnet man als Lösungen des LGS

$$(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$$

die zugehörigen Eigenvektoren.

- Anmerkung: Ist \vec{x} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , dann auch $k\vec{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, wie man durch Multiplikation von $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit k sieht.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

- Definition

Zum Eigenvektor \vec{x} heißt $\vec{x}/|\vec{x}|$ der **normierte Eigenvektor**.

- Anmerkung: Oft reicht es, einen Eigenvektor in „einfacher“ Form anzugeben.
- Beispiel