Vektoren 4

- Definition (Spatprodukt)

  Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Als ***Spatprodukt*** (oder *gemischtes Produkt*) der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bezeichnen wir die reelle Zahl

  $$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- Geometrische Veranschaulichung mit dem Spatvolumen.

- Satz (Berechnung des Spatprodukts mit einer Determinante)

  Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ ist das Spatprodukt

  $$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

- Beweis

- Satz

  Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$ (alle drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$) gilt:

  $$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ liegen in einer gemeinsamen Ebene.}$$

- Anmerkung: Vektoren, die in einer gemeinsamen Ebene liegen, heißen ***komplanar***.

- Satz (Rechenregeln für das Spatprodukt)

  Für das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt

  $$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = [\,\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\,] = [\,\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\,] = -[\,\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\,] = -[\,\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\,] = -[\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\,],$$

  d.h. bei zyklischer Vertauschung bleibt der Wert gleich, wohingegen sich bei nichtzyklischer Vertauschung das Vorzeichen ändert.

- Beweis
- Vektorielle Darstellung einer ***Geraden*** (***Punkt-Richtungsform***)

  Gegeben: Punkt P_1 und Vektor $\vec{a}$.
  Gesucht: Gleichung der Geraden durch P_1 und parallel zu $\vec{a}$.

  Für einen *beliebigen* Punkt P auf der Geraden gilt:

  $$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{0P_1} + \lambda\vec{a}$$

  mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden durch

  $$\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{0P_1} + \lambda\vec{a}$$

  mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschrieben.
- Skizze
- Beispiel
- Vektorielle Darstellung einer ***Geraden*** (***Zweipunkteform***)

  Gegeben: zwei Punkte P_1, P_2.
  Gesucht: Gleichung der Geraden durch P_1 und P_2.

  Der Fall läßt sich auf die Punkt-Richtungsform zurückführen, wenn als Richtungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ genommen wird.

  Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden dann durch

  $$\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{0P_1} + \lambda\overrightarrow{P_1P_2}$$

  mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschrieben.
- Skizze
- Beispiel: Eine Gerade gehe durch $P_1 = (5\,|\,3\,|-7)$ und $P_2 = (4\,|\,8\,|\,1)$. Liegen $P_3 = (3\,|\,13\,|\,9)$ und $P_4 = (7\,|-7\,|\,4)$ auf der Geraden?
- Beispiel: Gerade gegeben; Durchstoßpunkt durch die x-y-Ebene gesucht.
- Beispiel: Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.