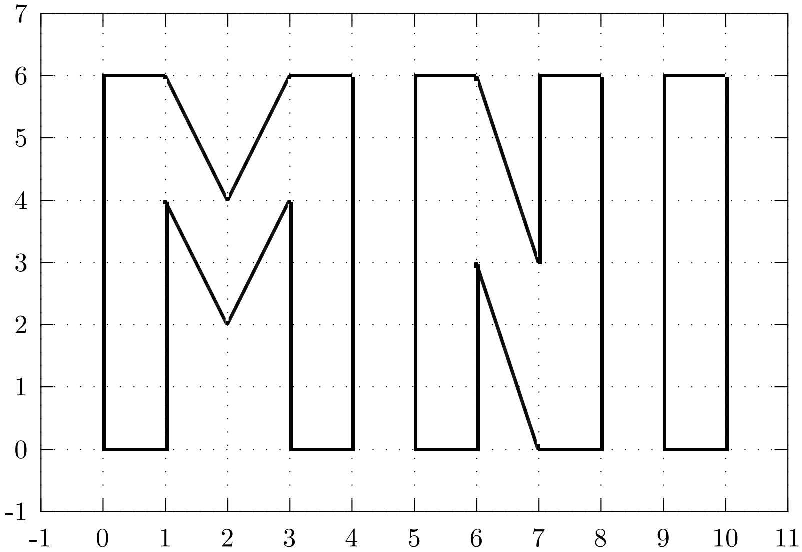
Aufgabe 1

Das folgende Bild zeigt den Schriftzug „MNI“. Die Buchstaben sind durch die Koordinaten der Eckpunkte gegeben.



Buchstabe M:

x	0	1	1	2	3	3	4	4	3	2	1	0	0
y	0	0	4	2	4	0	0	6	6	4	6	6	0

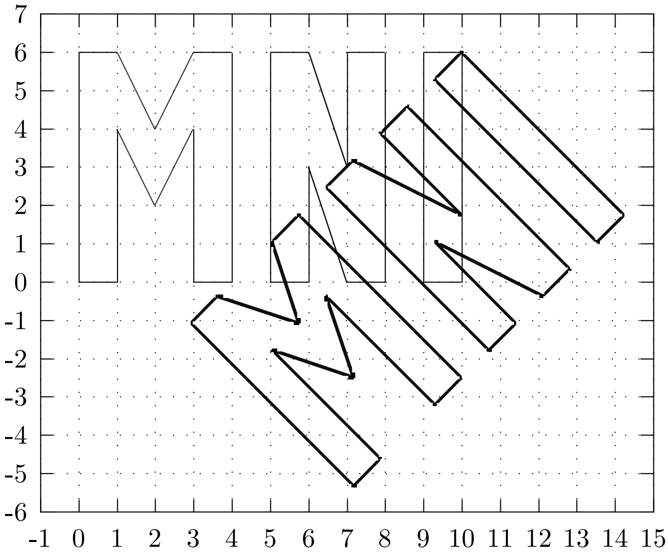
Buchstabe N:

x	5	6	6	7	8	8	7	7	6	5	5
y	0	0	3	0	0	6	6	3	6	6	0

Buchstabe I:

x	9	10	10	9	9
y	0	0	6	6	0

Der Schriftzug soll um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn um die rechte obere Ecke des Buchstabens „I“ gedreht werden. Die Koordinaten des Drehzentrums sind also $x = 10$ und $y = 6$. Das folgende Bild zeigt den Ausgangszustand und das Ergebnis der Drehung.



Berechnen Sie für zwei Koordinatenpaare des Buchstabens M, zum Beispiel für (2|2) und (3|4), die transformierten Werte. Arbeiten Sie dazu mit homogenen Koordinaten. Geben Sie Matrizen an

1. für die Verschiebung (Translation) des Drehzentrums in den Ursprung des Koordinatensystems,

2. für die Drehung um den Ursprung um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn,

3. für die Rücktranslation des Drehzentrums.

Verknüpfen Sie diese drei Matrizen zu einer einzigen Matrix. Verwenden Sie diese Matrix dann zur Berechnung der neuen Koordinatenwerte.

Lösung: Die Verschiebung eines Punktes der Ebene um dx in x-Richtung und dy in y-Richtung wird beim Arbeiten mit homogenen Koordinaten durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Eine Drehung um den Winkel φ mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Drehzentrum wird mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt.

Wir müssen drei Operationen darstellen.

1. Die Verschiebung (Translation) des Drehzentrums in den Ursprung des Koordinatensystems.

   Die Verschiebungen in x- und y-Richtung sind $dx = -10$ und $dy = -6$, so daß wir die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   erhalten.

2. Die Drehung um den Ursprung um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn.

   Es gilt sowohl $\cos(45°) = \sqrt{2}/2$ als auch $\sin(45°) = \sqrt{2}/2$. Wir verwenden die Abkürzung $k = \sqrt{2}/2$ und bekommen
$$\begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   als Matrix für die Drehung.

3. Die Rücktranslation des Drehzentrums.

   Hierbei sind die Verschiebungen in x- und y-Richtung genau umgekehrt zu den obigen, also ist $dx = 10$ und $dy = 6$, und wir erhalten
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   als dritte Matrix.

Um die gesamte Transformation mit einer einzigen Matrizenmultiplikation ausführen zu können, fassen wir die Matrizen zusammen und berechnen das Produkt
$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & -k & -4k \\ k & k & -16k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} k & -k & -4k+10 \\ k & k & -16k+6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jetzt können die Punkte des Schriftzugs transformiert werden. Ein Punkt mit den Koordinaten x und y wird dabei in homogenen Koordinaten als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt, und die Koordinaten x' und y' des transformierten Punktes werden durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k & -4k+10 \\ k & k & -16k+6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet.

Für die beiden Beispielpunkte bekommen wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k & -k & -4k+10 \\ k & k & -16k+6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4k+10 \\ -12k+6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4\frac{\sqrt{2}}{2}+10 \\ -12\frac{\sqrt{2}}{2}+6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10-2\sqrt{2} \\ 6-6\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,2 \\ -2,5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k & -k & -4k+10 \\ k & k & -16k+6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5k+10 \\ -9k+6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5\frac{\sqrt{2}}{2}+10 \\ -9\frac{\sqrt{2}}{2}+6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10-2,5\sqrt{2} \\ 6-4,5\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,5 \\ -0,36 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Punkt $(2|2)$ wird also in den Punkt $(7,2|-2,5)$ transformiert und der Punkt $(3|4)$ in den Punkt $(6,5|-0,36)$, was man auch gut in der Zeichnung sehen kann.