Aufgabe 1

Zeichnen Sie die Punkte $A(0|0)$, $B(0|3)$, $C(0|6)$ und $D(-2|6)$ in ein Koordinatensystem ein. Die Punkte sollen um 120° um den Ursprung gedreht werden. Berechnen Sie dazu mit Hilfe einer Drehmatrix die Koordinaten der gedrehten Punkte, und zeichnen Sie diese dann ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

Lösung: Wird der Punkt mit den Koordinaten x und y um den Winkel φ gedreht, wobei der Ursprung des Koordinatensystems das Zentrum der Drehung ist, so berechnen sich die Koordinaten x' und y' des gedrehten Punktes durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Mit $\varphi = 120°$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120° & -\sin 120° \\ \sin 120° & \cos 120° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

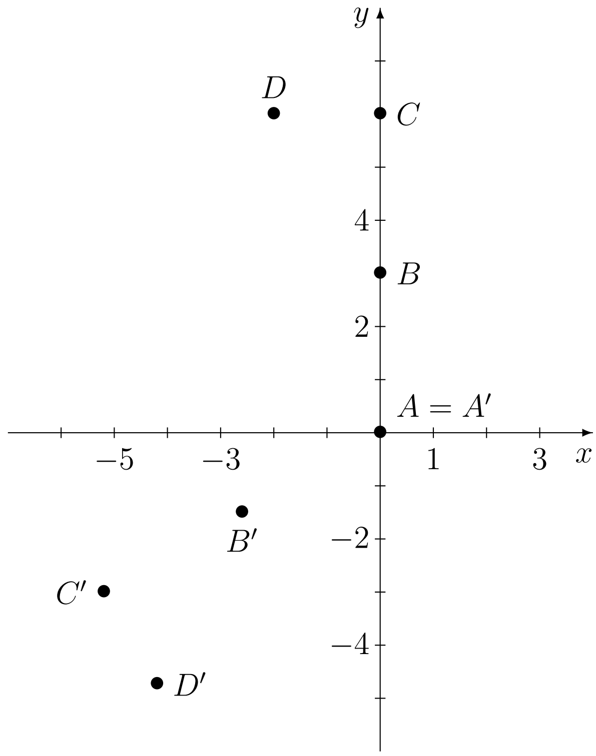
dabei haben wir die speziellen Werte eingetragen, die die Winkelfunktionen bei 120° annehmen. Setzen wir für x und y nacheinander die Koordinaten von A, B, C und D ein, erhalten wir die Koordinaten der gedrehten Punkte A', B', C' und D'. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A' &= (0|0), \\ B' &= (-3\sqrt{3}/2\,|-3/2) \approx (-2{,}6\,|-1{,}5), \\ C' &= (-3\sqrt{3}\,|-3) \approx (-5{,}2\,|-3), \\ D' &= (1-3\sqrt{3}\,|-\sqrt{3}-3) \approx (-4{,}2\,|-4{,}7). \end{aligned}$$

Zum Beispiel wird der Punkt B mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 3$ durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot(-1/2) + 3\cdot(-\sqrt{3}/2) \\ 0\cdot\sqrt{3}/2 + 3\cdot(-1/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in den Punkt B' gedreht.



Aufgabe 2
Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie die Eigenvektoren nicht-normiert und ohne Parameter in möglichst einfacher Form.

Lösung: Eigenwerte sind Lösungen λ der Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Mit der Einheitsmatrix E ist

$$\lambda\vec{x} = \lambda(E\vec{x}) = (\lambda E)\vec{x},$$

so daß aus $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - (\lambda E)\vec{x} = (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

folgt. Das ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Komponenten von $\vec{x}$. Da das System homogen ist, gibt es nur dann nichttriviale Lösungen, falls

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

gilt. Damit haben wir eine Möglichkeit zur Berechnung von λ.

Mit unserer speziellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 7 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 7 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(9-\lambda) - 21 \\ &= 45 - 5\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 21 = \lambda^2 - 14\lambda + 24. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

folgt

$$\lambda^2 - 14\lambda + 24 = 0.$$

Wie wir sehen, führt bei einer 2×2–Matrix die Berechnung der Eigenwerte auf eine quadratische Gleichung. Als Lösungen erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 24} = 7 \pm \sqrt{25}.$$

Die beiden Eigenwerte der Matrix A sind also

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 12.$$

Zu jedem der beiden Eigenwerte müssen nun die zugehörigen Eigenvektoren berechnet werden.

(a) Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Wir bekommen die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1, wenn wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}$$

lösen. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 3 \\ 7 & 9-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 3 \\ 7 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

wird das lineare Gleichungssystem zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 &= 0 \end{aligned}$$

reduzieren sich auf die eine Gleichung

$$x_1 + x_2 = 0$$

für die beiden Unbekannten x_1 und x_2. Also kann eine der Unbekannten beliebig gewählt werden. Nehmen wir $x_1 = \mu$ als freien Parameter, so erhalten wir die unendlich vielen Lösungsvektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

Daß man zu einem Eigenwert immer unendlich viele Eigenvektoren erhalten muß wird klar, wenn wir die Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

betrachten. Löst $\vec{x}$ die Gleichung, dann auch ein Vielfaches $\xi\vec{x}$ von $\vec{x}$, was durch Multiplikation der Gleichung mit ξ sofort zu sehen ist:

$$\xi A\vec{x} = \xi\lambda\vec{x}$$

Da also sowieso immer klar ist, daß mit $\vec{x}$ auch $\xi\vec{x}$ ein Eigenvektor ist, läßt man oft den Parameter weg. Da $\vec{x}$ mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden darf, gibt man $\vec{x}$ oft normiert an, d.h. mit $|\vec{x}| = 1$ oder in einer möglichst einfachen Form z. B. mit geraden Zahlen. Wir schreiben also kurz, daß

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist.

(b) Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 12$.

Die Rechnung für λ_2 verläuft völlig analog zu der für λ_1. Aus

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 3 \\ 7 & 9-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 5-12 & 3 \\ 7 & 9-12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt eine Gleichung

$$7x_1 - 3x_2 = 0$$

für die Unbekannten x_1 und x_2. Mit dem freien Parameter $x_1 = \mu$ bekommen wir $7\mu = 3x_2$, also $x_2 = 7\mu/3$. Die Eigenvektoren sind dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

In der Kurzschreibweise haben wir also den Eigenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda_2 = 12$.