Aufgabe 1

Für welche reellen Werte des Parameters λ besitzt das folgende homogene lineare Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{pmatrix} (7-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 4 & (-5-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -\lambda & -1 \\ -6 & 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ein quadratisches lineares Gleichungssystem (LGS) hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist. Ein homogenes LGS, also ein LGS bei dem auf der „rechten Seite“ nur Null steht, hat immer die triviale Lösung (jede Unbekannte hat den Wert Null). Ist also bei einem homogenen LGS die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null, so hat das System nur die triviale Lösung.

Wir haben in dieser Aufgabe ein homogenes LGS. Also gibt es mindestens die triviale Lösung. Sind andere Lösungen möglich? Nur dann, wenn das LGS nicht eindeutig lösbar ist! Also nur dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht ungleich Null ist. „Nicht ungleich Null“ heißt aber „gleich Null“.

Also wann hat unser LGS nicht-triviale Lösungen? Wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} (7-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 4 & (-5-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -\lambda & -1 \\ -6 & 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnen wir die Determinante aus, bekommen wir eine Gleichung. Lösen wir die Gleichung, bekommen wir λ.

$$\begin{vmatrix} (7-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 4 & (-5-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -\lambda & -1 \\ -6 & 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\cdot(-5-\lambda)\cdot(\lambda^2+1)$$

ergibt sich, wenn die Determinante nach der ersten Zeile entwickelt wird, ebenso die Unterdeterminante dritter Ordnung. Der letzte Faktor ist der Wert der dann noch verbleibenden Unterdeterminante zweiter Ordnung.

Aus der Gleichung

$$(7-\lambda)\cdot(-5-\lambda)\cdot(\lambda^2+1)=0$$

folgen sofort die beiden reellen Lösungen

$$\lambda_1=-5 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2=7.$$

Weitere reelle Lösungen der Gleichung gibt es nicht. Für diese beiden Werte von λ hat also das LGS nicht-triviale Lösungen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie, falls das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, den Wert von x_3 mit der Cramer-Regel.

$$\begin{aligned} 3x_1+x_4 &= 5\\ -x_2+2x_3+5x_4 &= 8\\ -x_1+5x_2 &= -17\\ 5x_3+10x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Lösung: Wir haben vier lineare Gleichungen für vier Unbekannte, also ein quadratisches lineares Gleichungssystem. Es ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante D der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist. Wir berechnen D.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 5\\ -1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 15 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}\\ &= (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 30 & 76\\ -1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 30 & 76\\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -(300-380)=80. \end{aligned}$$

Zunächst wurde das fünffache der ersten Spalte zur zweiten Spalte addiert, das ergab eine weitere Null in der dritten Zeile; dann wurde nach der dritten Zeile entwickelt. In der Determinante dritter Ordnung wurde dann das 15-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile addiert, wodurch in der ersten Spalte eine weitere Null entstand; nach der ersten Spalte wurde dann auch entwickelt.

Da sich $D=80\neq 0$ ergibt, ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Den Wert von x_3 bekommen wir nach der Cramer-Regel durch $x_3=D_3/D$, wobei D_3 die Determinante ist, die aus D entsteht, wenn die dritte Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt wird. Wir berechnen D_3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 8 & 5\\ -1 & 5 & -17 & 0\\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 8 & 5\\ -1 & 0 & 23 & 25\\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1\\ -1 & 23 & 25\\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \quad (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 74 & 76 \\ -1 & 23 & 25 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 74 & 76 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = -(740-760-380) = 400.$$

Hierbei wurde zuerst das fünffache der zweiten Zeile zur dritten Zeile addiert, dann wurde nach der zweiten Spalte entwickelt. In der neuen Determinante dritter Ordnung wurde das dreifache der zweiten Zeile zur ersten addiert, um in der ersten Spalte eine weitere Null zu bekommen; dann wurde nach der ersten Spalte entwickelt.

Als Endergebnis bekommen wir schließlich für den Wert von x_3 mit Hilfe der Cramer-Regel

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{400}{80} = 5.$$