Aufgabe 1

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) sei auf das folgende Lösungsschema transformiert:

$$\begin{array}{|ccc|cc|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & -9 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 9 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -12 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Wie groß ist die Anzahl der Unbekannten? Welchen Rang hat das LGS? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge? Wie lautet die Lösung $\vec{x}$ des LGS? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Lösung: In dem Lösungsschema stehen – abgekürzt geschrieben – vier Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 - 9 \cdot x_5 & = & 7 \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 & = & 9 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 & = & -12 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 & = & 0
\end{array}$$

Die Anzahl der Unbekannten ist $n = 5$. Der Rang des linearen Gleichungssystems ist $\text{rg(LGS)} = 3$, gleich der Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der Einheitsmatrix. Die Dimension der Lösungsmenge ist $\dim(\text{L}) = 2$, gleich der Anzahl der freien Parameter.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & - & 4\lambda & + & 9\mu \\ 9 & & & - & 6\mu \\ -12 & + & 3\lambda & - & 5\mu \\ & & \lambda & & \\ & & & & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei wurde $x_4 = \lambda$ und $x_5 = \mu$ gesetzt, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

In der geometrischen Interpretation ist die Lösung eine „Ebene“ im fünfdimensionalen Raum, d.h. ein zweidimensionaler Unterraum des fünfdimensionalen Raumes.

Aufgabe 2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

mit dem Eliminationsverfahren von Gauß. Welchen Rang hat das System? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Lösung: Das lineare Gleichungssystem (LGS) wird für die Durchführung des Gauß-Verfahrens in vereinfachter Form geschrieben.

2	1	3	8	mit Zeile 3 vertauschen
-1	-4	1	3	
1	2	-4	1	
1	2	-4	1	
-1	-4	1	3	$+$(Zeile 1)
2	1	3	8	$-2 \cdot$ (Zeile 1)
1	2	-4	1	
0	-2	-3	4	$: (-2)$
0	-3	11	6	
1	2	-4	1	
0	1	$3/2$	-2	
0	-3	11	6	$+3 \cdot$ (Zeile 2)
1	2	-4	1	
0	1	$3/2$	-2	
0	0	$31/2$	0	$: (31/2)$
1	2	-4	1	$+4 \cdot$ (Zeile 3)
0	1	$3/2$	-2	$-\frac{3}{2} \cdot$ (Zeile 3)
0	0	1	0	
1	2	0	1	$-2 \cdot$ (Zeile 2)
0	1	0	-2	
0	0	1	0	
1	0	0	5	
0	1	0	-2	
0	0	1	0	

Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das LGS hat den Rang 3,

$$\mathrm{rg(LGS)} = 3.$$

Die Dimension der Lösungsmenge ist 0,

$$\dim(\mathrm{L}) = 0.$$

Geometrisch ist die Lösung ein Punkt im dreidimensionalen Raum.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Welchen Rang hat das System? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Lösung: Das lineare Gleichungssystem (LGS) wird für die Durchführung des Gauß-Verfahrens in vereinfachter Form geschrieben.

1	2	1	−9	4	
3	−1	10	1	5	$-3 \cdot$ (Zeile 1)
1	1	2	−5	3	−(Zeile 1)
1	2	1	−9	4	
0	−7	7	28	−7	: (−7)
0	−1	1	4	−1	
1	2	1	−9	4	
0	1	−1	−4	1	
0	−1	1	4	−1	+(Zeile 2)
1	2	1	−9	4	$-2 \cdot$ (Zeile 2)
0	1	−1	−4	1	
0	0	0	0	0	
1	0	3	−1	2	
0	1	−1	−4	1	
0	0	0	0	0	

Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das LGS hat den Rang 2,

$$\mathrm{rg(LGS)} = 2.$$

Die Dimension der Lösungsmenge ist 2,

$$\dim(\mathrm{L}) = 2.$$

Geometrisch ist die Lösung eine „Ebene“ im vierdimensionalen Raum, bzw. ein zweidimensionaler Unterraum des vierdimensionalen Raumes.

Aufgabe 4

Lösen Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem nach dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x - y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Welchen Rang hat das System? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Lösung: Das lineare Gleichungssystem (LGS) wird für die Durchführung des Gauß-Verfahrens in vereinfachter Form geschrieben.

$$\begin{array}{lrr|ll}
1 & 1 & -2 & 0 & \\
1 & -1 & -2 & 0 & -(\text{Zeile } 1) \\
2 & 3 & -4 & 0 & -2 \cdot (\text{Zeile } 1) \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & \\
0 & -2 & 0 & 0 & : (-2) \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & -(\text{Zeile } 2) \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 & -(\text{Zeile } 2) \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das LGS hat den Rang 2,

$$\mathrm{rg}(\mathrm{LGS}) = 2.$$

Die Dimension der Lösungsmenge ist 1,

$$\dim(\mathrm{L}) = 1.$$

Geometrisch ist die Lösung eine Gerade im dreidimensionalen Raum; die Gerade geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.