Aufgabe 1
Berechnen Sie die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-10) - 3 \cdot 6 = -20 - 18 = -38,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 - (-8) = 26,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) = 15 - 8 = 7,$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - (-1) \cdot a = a - (-a) = 2a.$$

Aufgabe 2
Berechnen Sie die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lösung: Bei der Berechnung von Determinanten führen viele Wege zum Ziel. Deshalb sind die folgenden Lösungen nur Beispiele und keinesfalls die einzigen Rechenwege.

Wird bei der ersten Determinante die dritte Zeile zweimal von der ersten Zeile und fünfmal von der zweiten Zeile abgezogen, und wird dann nach der ersten Spalte entwickelt, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -12 & -14 \end{vmatrix} = 14 - 24 = -10.$$

Die zweite Determinate entwickelt man am besten nach der zweiten Zeile, da diese zweimal die Null enthält.

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} = b \cdot (-b - b) = -2b^2.$$

Die letzte Determinante kann deutlich vereinfacht werden, wenn entweder die dritte Spalte von der ersten und der zweiten Spalte abgezogen wird, oder wenn die dritte Zeile von der ersten und der zweiten Zeile subtrahiert wird.

Wir wählen die erste Version. Dann bekommen wir in der dritten Zeile zweimal die Null, so daß sich eine Entwicklung nach dieser Zeile anbietet.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ &= 1. \end{aligned}$$

Wir haben hierbei verwendet, daß die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

für beliebiges α gilt.

Aufgabe 3

Für welche Werte von ω ist die folgende Determinante D gleich Null? (m und k sind Konstanten.)

$$D = \begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix}$$

Lösung: Aus der Gleichung

$$D = \begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = (-m\omega^2 + 2k)^2 - (-k)^2 = 0$$

müssen die Werte von ω bestimmt werden. Es gibt mehrere (ähnliche) Wege zur Lösung der Gleichung.

1. Weg: Mit der dritten binomischen Formel

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

folgt

$$(-m\omega^2 + 2k - k)(-m\omega^2 + 2k + k) = 0.$$

Wir setzen den 1. Faktor gleich Null:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + k &= 0 \\ -m\omega^2 &= -k \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \end{aligned}$$

Wir setzen den 2. Faktor gleich Null:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + 3k &= 0 \\ -m\omega^2 &= -3k \\ \omega^2 &= \frac{3k}{m} \\ \omega_{3,4} &= \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}\,. \end{aligned}$$

2. Weg: Wird bei der Gleichung

$$(-m\omega^2 + 2k)^2 = (-k)^2 = k^2$$

die Wurzel gezogen, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. auf der rechten und der linken Seite $+\sqrt{\ldots}$ oder auf beiden Seiten $-\sqrt{\ldots}$,
2. auf einer Seite $+\sqrt{\ldots}$ und auf der anderen Seite $-\sqrt{\ldots}$.

Der 1. Fall führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + 2k &= k \\ -m\omega^2 &= -k \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \end{aligned}$$

Der 2. Fall liefert

$$
\begin{aligned}
-m\omega^2 + 2k &= -k \\
-m\omega^2 &= -3k \\
\omega^2 &= \frac{3k}{m} \\
\omega_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.
\end{aligned}
$$

3. Weg: Wird in dem Ausdruck

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

die Klammer ausgerechnet

$$4k^2 - 4km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 = 0,$$

entsteht eine biquadratische Gleichung

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0,$$

bzw. nach Division durch m^2

$$\omega^4 - 4\,\frac{k}{m}\,\omega^2 + 3\,\frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Mit der Abkürzung $x = \omega^2$ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4\,\frac{k}{m}\,x + 3\,\frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= 2\,\frac{k}{m} \pm \sqrt{4\,\frac{k^2}{m^2} - 3\,\frac{k^2}{m^2}} \\
&= 2\,\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}\,,
\end{aligned}
$$

so daß wir für x die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{k}{m} \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3\,\frac{k}{m}$$

erhalten. Wegen $x = \omega^2$ ist $\omega = \pm\sqrt{x}$, und wir erhalten als Endergebnis die vier Lösungen

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{und} \qquad \omega_{3,4} = \pm\sqrt{3\,\frac{k}{m}}\,.$$

Aufgabe 4
Berechnen Sie die folgende Determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

Lösung: Wir bezeichnen die Determinante mit D. Entwickelt man D mehrfach hintereinander nach der ersten Zeile oder der ersten Spalte, erhält man

$$D = 5! \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 5! \cdot (6 \cdot 7 - 8 \cdot 9) = 5!(42 - 72) = 120(-30) = -3600.$$