

Matrizen 5

- Wir betrachten eine Anwendung der Matrizenrechnung, die in der Computergraphik eine große Rolle spielt.
- **Homogene Koordinaten:** Geometrische Transformationen (Translation, Skalierung, Rotation) sollen einheitlich durch Matrizenmultiplikationen beschrieben werden. Damit dies möglich wird, erweitern wir die Tupel der kartesischen Koordinaten um einen Eintrag; aus den 2-Tupeln werden 3-Tupel, und aus den 3-Tupeln werden 4-Tupel.

Der neue Eintrag hat keine anschauliche Bedeutung; er ist ein technischer Trick, um eine Verschiebung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

mit einer Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschreiben zu können. Hier haben wir das Koordinatenpaar $(x | y)$ um den Eintrag 1 zu $(x | y | 1)$ erweitert (entsprechend bei $(x' | y')$). Auch eine andere Zahl als 1 kann verwendet werden.

- Kartesische und homogene Koordinaten.
 - Zweidimensional
Es sei P ein Punkt der Ebene.
Kartesische Koordinaten: $P = (x | y)$.
Homogene Koordinaten: $P_h = (h \cdot x | h \cdot y | h)$ mit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.
 - Dreidimensional
Es sei P ein Punkt des Raumes.
Kartesische Koordinaten: $P = (x | y | z)$.
Homogene Koordinaten: $P_h = (h \cdot x | h \cdot y | h \cdot z | h)$ mit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$.

Die Darstellung von P durch homogene Koordinaten ist nicht eindeutig, es sind unterschiedliche h möglich.

- Beispiele: Umformung zwischen kartesischen und homogenen Koordinaten.
- Translation

Ein Punkt soll in x -Richtung um die Differenz d_x und in y -Richtung um die Differenz d_y verschoben werden.

kartesische Koordinaten ($x \mid y$)	homogene Koordinaten ($x \mid y \mid 1$)
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

- Skalierung

Die x -Koordinate eines Punktes soll auf das s_x -fache gebracht werden, entsprechend die y -Koordinate auf das s_y -fache.

kartesische Koordinaten ($x \mid y$)	homogene Koordinaten ($x \mid y \mid 1$)
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Nullpunkt verändert seine Lage nicht. Durch das Skalieren aller Punkte eines Bildes entsteht ein *Zoomeffekt*. Das Bild wird vergrößert oder verkleinert (um unterschiedliche Faktoren in x - und y -Richtung, falls $s_x \neq s_y$ ist), der Ursprung ist dabei der Fixpunkt.

Will man einen anderen Fixpunkt F als den Koordinatenursprung haben, geht man in drei Schritten vor: 1. Translation, so daß F in den Ursprung fällt, 2. Skalierung, 3. Rücktranslation.

Für $s = s_x = s_y$ haben wir eine *uniforme Skalierung*; $s > 1$ ist eine Streckung (Hineinzoomen), $0 < s < 1$ ist eine Stauchung (Herauszoomen). Eine uniforme Skalierung kann auch mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden; hier haben wir die Situation, daß homogene Koordinaten verwendet werden, deren Zusatzkoordinate ungleich 1 ist.

- Rotation

Ein Punkt soll um den Ursprung gedreht werden. Der Drehwinkel soll gleich α sein.

kartesische Koordinaten ($x y$)	homogene Koordinaten ($x y 1$)
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Falls die Rotationsachse nicht durch den Ursprung gehen soll, muß man 1. eine Translation des Drehzentrums in den Ursprung, 2. eine Rotation und 3. eine Rücktranslation durchführen.

- Anmerkung: Besteht eine Transformation aus mehreren Teilen (z.B. Translation, Rotation, Translation), können die betreffenden Matrizen zunächst multipliziert werden; erst dann werden Punktkoordinaten mit Hilfe der Produktmatrix umgerechnet. Das spart Rechenzeit, wenn ein Bild, das sich aus vielen Punkten zusammensetzt, transformiert wird.
- Beispiel (Rotation um eine Punkt ungleich dem Ursprung): Der Punkt $P = (5 | 2)$ soll um den Punkt $Q = (3 | 2)$ gedreht werden; der Drehwinkel soll gleich 90° sein.
- Anmerkung: Vorteile der homogenen Koordinaten sind u.a.
 - einheitliche Darstellung (Matrizen für alle Arten von Transformationen),
 - komplexe Transformationen werden aus einfachen aufgebaut (durch Multiplikationen von Matrizen),
 - schnelle Berechnungen (bei Zusammenfassung mehrerer Transformationen zu einer Matrix; besonders nützlich bei der Umrechnung vieler Punktkoordinaten mit denselben Transformationen),
 - leichte Umkehrung einer Transformation (mit einer inversen Matrix).