Matrizen 3

- Definition

  Ein Vektor $\vec{v}$ heißt ***Linearkombination*** aus den n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, wenn gilt

  $$\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{a}_i$$

  mit reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- Beispiel

- Definition

  Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ heißen ***linear abhängig***, wenn sich einer dieser Vektoren als Linearkombination der restlichen $n-1$ Vektoren darstellen läßt, ansonsten heißen sie ***linear unabhängig***.

- Beispiele

- Satz

  Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ gilt.

- Beweis

- Anmerkung: In dem quadratischen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist $\vec{0}$ eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A, d.h. es gilt

  $$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

  mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ von A.

  Die Determinante von A ist genau dann ungleich Null, wenn das LGS eindeutig lösbar ist, also nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$ hat, die Spaltenvektoren von A also linear unabhängig sind.

  Beachten wir, daß die Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn die Determinante von A ungleich Null ist, so erhalten wir den folgenden Satz.

- Satz

  Es sei A eine quadratische Matrix. A ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

- Anmerkung: Entsprechendes gilt mit den Zeilenvektoren, da $\det(A)$ genau dann ungleich Null ist, wenn $\det(A^T)$ ungleich Null ist.

- Satz

  Der Rang eines beliebigen LGS (sowohl quadratisch als auch nichtquadratisch) ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix:

  $$\begin{aligned} \text{rg(LGS)} &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren} \\ &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.} \end{aligned}$$

  (ohne Beweis)

- Definition

  Der ***Rang einer Matrix*** A ist gleich dem Rang eines LGS mit der Koeffizientenmatrix A.

- Anmerkung: Somit ist der Rang einer Matrix gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

- Anmerkung: Für eine quadratische Matrix A sind also die Eigenschaften

  - A ist invertierbar,
  - $\det A \neq 0$,
  - A ist regulär,
  - die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig,
  - die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig,
  - der Rang von A ist maximal,
  - $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung,
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar

  gleichwertig.

- Drehmatrizen: Problemstellung.

  In einem x-y-Koordinatensystem soll der Punkt $P = (x_1 \,|\, y_1)$ um den Winkel φ um den Ursprung gedreht werden; es entsteht dann der Punkt $Q = (x_2 \,|\, y_2)$.

  Gegeben seien x_1, y_1 und φ. Gesucht sind x_2 und y_2.

- Skizze
- Satz

  Für die Koordinaten von Q gilt:

  $$\begin{array}{rcl} x_2 & = & x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \\ y_2 & = & x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi. \end{array}$$

  Mit einer ***Drehmatrix*** geschrieben:

  $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

- Beweis
- Anmerkung: Die Drehung um $\varphi = 0°$ liefert die Einheitsmatrix. Die Drehung zurück, d.h. um den Winkel $-\varphi$ führt zur inversen Matrix. Die Drehung um einen Winkel α und dann um einen Winkel β ist gleich der Drehung um $\alpha+\beta$; das Produkt der Drehmatrizen für α und β ist die Drehmatrix für $\alpha + \beta$. Damit können die Additionstheoreme der Winkelfunktionen leicht hergeleitet werden.
- Satz (Additionstheoreme der Winkelfunktionen)

  Es gilt

  $$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha \pm \beta) & = & \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{array}$$

- Beweis