FH Gießen-Friedberg, FB 06 (MNI) Skript 12
Lineare Algebra 8. Juni 2007
Prof. Dr. H.-R. Metz

Lineare Gleichungssysteme 3

- Satz

  Zu einem LGS bezeichne m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten. Für beliebige LGS (sowohl $m = n$ als auch $m \neq n$) gilt:

inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$	homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$
Das LGS hat entweder 1. genau eine Lösung oder 2. unendlich viele Lösungen oder 3. keine Lösung.	Das LGS hat entweder 1. genau eine Lösung, $\vec{x} = \vec{0}$ oder 2. unendlich viele Lösungen, darunter ist $\vec{x} = \vec{0}$.

- Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar durch Interpretation des allgemeinen Lösungsschemas.

$$
\begin{array}{c|cccc|c|cccc|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & & & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{k+1} & & & \multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-5}\cline{7-10}\cline{12-12}
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & \alpha_{1,k+1} & & \cdots & \alpha_{1,n} & & \beta_1 \\
 & 0 & 1 & & & & \alpha_{2,k+1} & & \cdots & \alpha_{2,n} & & \beta_2 \\
 & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
k & 0 & & & 1 & & \alpha_{k,k+1} & & \cdots & \alpha_{k,n} & & \beta_k \\
\cline{2-5}\cline{7-10}\cline{12-12}
\multicolumn{12}{c}{} \\
\cline{2-10}\cline{12-12}
k+1 & 0 & & \cdots & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & & \beta_{k+1} \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
m & 0 & & \cdots & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & & \beta_m \\
\cline{2-10}\cline{12-12}
\end{array}
$$

- Anmerkung: Bei quadratischen LGS ($m = n$) haben wir die Besonderheit, daß zur Koeffizientenmatrix A die Determinante $\det A$ gebildet werden kann.

- Definition

  Wir nennen eine quadratische Matrix A ***regulär***, wenn $\det A \neq 0$ ist. A heißt ***singulär***, falls $\det A = 0$ gilt.

- Satz

  Für quadratische LGS (d.h. $m = n$, Anzahl der Gleichungen gleich Anzahl der Unbekannten, d.h. quadratische Koeffizientenmatrix) gilt:

	inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit A quadratisch	homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ mit A quadratisch
$\det A \neq 0$ (A regulär)	eindeutige Lösung	eindeutige Lösung, $\vec{x} = \vec{0}$
$\det A = 0$ (A singulär)	entweder 1. unendlich viele Lös. oder 2. keine Lösung	unendlich viele Lösungen, darunter ist $\vec{x} = \vec{0}$

- Beweis: Die Aussagen lassen sich aus dem allgemeinen Lösungsschema gewinnen. Man beachte bezüglich der elementaren Umformungen eines LGS:

  (a) die Multiplikation einer Zeile mit $a \neq 0$ ändert die Koeffizientenmatrix A in die Matrix A' mit $\det A' = a \cdot \det A$, also $\det A' = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$;

  (b) die Vertauschung von Zeilen oder Spalten ändert die Koeffizientenmatrix A in die Matrix A' mit $\det A = -\det A'$, also $\det A' = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$;

  (c) die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Koeffizientendeterminante nicht.

- Satz (Cramer-Regel)

  Ein quadratisches LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit regulärer Koeffizientenmatrix A (d.h. mit $\det A \neq 0$) besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

  wobei die Determinante D_i dadurch gebildet wird, daß in $\det A$ der i-te Spaltenvektor durch den Spaltenvektor $\vec{b}$ ersetzt wird,

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Beweis: Siehe einführendes Beispiel zu Determinanten für die Herleitung im Fall $n = 2$.

- Beispiel
- Anmerkung: Der Gauß-Algorithmus löst ein LGS wesentlich schneller als die Cramer-Regel. Diese spielt hauptsächlich bei theoretischen Überlegungen eine Rolle.