FH Gießen-Friedberg, FB 06 (MNI) Skript 9
Lineare Algebra 18. Mai 2007
Prof. Dr. H.-R. Metz

# Matrizen 1

- Definition (Matrix)

  Ein System von Zahlen $a_{ik}$, die rechteckig in $m$ Zeilen und $n$ Spalten angeordnet sind, heißt $m \times n$-***Matrix***:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

  Die $a_{ik}$ heißen *Elemente* der Matrix.

- Bezeichnungen:

  $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ heißt $i$-ter ***Zeilenvektor***,

  $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ heißt $k$-ter ***Spaltenvektor***.

  Bei der ***Nullmatrix*** sind alle $a_{ik} = 0$.

- Anmerkung: Im Gegensatz zu Determinanten kann bei Matrizen $m \neq n$ sein. Eine Matrix mit $m = n$ heißt ***quadratische Matrix***. Zu einer quadratischen Matrix $A$ kann die Determinaten gebildet werden, Schreibweise: $\det(A)$.

  Die Elemente $a_{11}$, $a_{22}$, $\ldots$, $a_{nn}$ bilden die ***Hauptdiagonale*** einer quadratischen Matrix.

- Beispiele

- Definition

  Die ***Transponierte*** $A^T$ der Matrix $A$ entsteht durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von $A$.

- Anmerkung: Es gilt $(A^T)^T = A$.

- Beispiele

- Faßt man Zeilen- und Spaltenvektoren als Matrizen auf, dann entsteht ein Spaltenvektor durch Transponieren des entsprechenden Zeilenvektors

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und umgekehrt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

- Definition

Es sei $A = (a_{ik})$ eine quadratische Matrix. $A$ heißt

(a) ***symmetrisch***, wenn $A^T = A$ ist, d.h. wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle $i$, $k$ gilt;

(b) ***Diagonalmatrix***, wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind, d.h. wenn $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$ gilt;

(c) ***Einheitsmatrix***, wenn $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $a_{ii} = 1$ für alle $i$ gilt,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(d) ***Dreiecksmatrix***, wenn alle Elemente oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

Untere Dreiecksmatrix:
$a_{ik} = 0$ für $i < k$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix:
$a_{ik} = 0$ für $i > k$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Beispiele

- Satz

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

- Beweis
- Definition

  Die Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ seien beide $m \times n$-Matrizen.

  (a) ***Gleichheit***: Es sei $A = B$, wenn $a_{ik} = b_{ik}$ für alle $i$, $k$ ist.

  (b) ***Addition***: Die $m \times n$-Matrix $C = (c_{ik})$ mit

  $$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \text{ und } k = 1, \ldots, n$$

  sei die Summe von $A$ und $B$, geschrieben $C = A + B$.

  (c) ***Multiplikation mit einer Zahl***: Es sei

  $$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}) \qquad \text{für alle } i, \, k,$$

  d.h. jedes Element von $A$ wird mit der Zahl $\lambda$ multipliziert.

- Anmerkung: Für $A + (-1) \cdot B$ schreiben wir $A - B$ und haben damit auch die ***Subtraktion*** von Matrizen.
- Beispiele
- Definition (Multiplikation von Matrizen)

  Es sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $n \times p$-Matrix. Das ***Produkt*** $C = A \cdot B$ ***der Matrizen*** $A$ und $B$ sei eine $m \times p$-Matrix $C = (c_{ik})$, deren Elemente durch

  $$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

  für $i = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, p$ berechnet werden.

- Anmerkung:

  (a) Die Multiplikation $A \cdot B$ ist nur möglich, wenn

  $$(\text{Spaltenzahl von } A) = (\text{Zeilenzahl von } B)$$

  gilt.

  (b) Die Zahl $c_{ik}$ ist das Skalarprodukt aus dem $i$-ten Zeilenvektor von $A$ und dem $k$-ten Spaltenvektor von $B$.

  (c) Im allgemeinen ist $AB \neq BA$.

  (d) Für Einheitsmatrizen $E$ vom passenden Typ gilt $EA = AE = A$.

- Beispiele, Rechenschema.

- Anmerkung: Die Spaltenvektoren des Produkts $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spaltenvektoren von $A$. Zum Beispiel ergibt sich für das Produkt

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 5 & 10 \\ -14 & 39 \end{pmatrix}$$

der erste Spaltenvektor der Produktmatrix als Linearkombination

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Ferner sind die Zeilenvektoren von $A \cdot B$ Linearkombinationen der Zeilenvektoren von $B$, zum Beispiel ist

$$(-3) \cdot (3,\, 4) + 4 \cdot (7,\, -5) + 7 \cdot (-2,\, 6) = (5,\, 10)$$

der zweite Zeilenvektor von $A \cdot B$.

- Anmerkung: Die Definition der Matrizenmultiplikation ist so gewählt, daß eine $m \times n$-Matrix eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ darstellt. Zum Beispiel stellt jede $2 \times 3$-Matrix eine Abbildung der 3-Tupel auf 2-Tupel dar; durch

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wird das Tripel $(x, y, z)$ linear auf das Paar $(v, w)$ abgebildet, da

$$v = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z$$

und

$$w = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z$$

ist.

- Beispiel

- Satz (Rechenregeln für Matrizenprodukte)
  Es gilt

  (a) $A(BC) = (AB)C$,
  (b) $A(B + C) = AB + AC$,
  (c) $(A + B)C = AC + BC$,
  (d) $(AB)^T = B^T A^T$.

  (ohne Bew.)

- Satz (Multiplikationssatz für Determinanten)
  Es seien $A$ und $B$ quadratische Matrizen vom gleichen Typ. Dann gilt
  $$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$
  (ohne Bew.)