

## Vektoren 2

- Definition (Einheitsvektor)

Ein Vektor  $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Einheitsvektor**, wenn  $|\vec{e}| = 1$  ist, d.h. wenn  $\vec{e}$  die Länge 1 hat.

- Anmerkung: Zu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

der Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{a}$ . Wir verwenden die Schreibweise  $\vec{e}_{\vec{a}}$ .

- Beispiele:

- Zahlenbeispiel;
- Gravitationskraft zwischen zwei Massen.

- Definition (kartesische Einheitsvektoren)

Die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir als **kartesische Einheitsvektoren**.

Die Koordinatendarstellung ist im  $\mathbb{R}^2$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Anmerkung (Komponentendarstellung von Vektoren)

Ein Vektor  $\vec{a}$  kann mit Hilfe der kartesischen Einheitsvektoren zerlegt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$$

Die Vektoren  $a_x \vec{e}_x$  u.s.w. heißen die **vektoriellen Komponenten** von  $\vec{a}$ .

- Definition (Skalarprodukt)

Es seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$  oder  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ . Ferner sei  $\varphi$  der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossene Winkel. Wir bezeichnen die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

als **Skalarprodukt** von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

- Anmerkung: Für  $\varphi$  gilt  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .
- Veranschaulichung mit Projektionen.
- Beispiel: Verschiebungsarbeit.
- Satz (Eigenschaften des Skalarprodukts)

Die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  seien alle aus dem  $\mathbb{R}^2$  oder alle aus dem  $\mathbb{R}^3$ . Dann gilt

- (a) Kommutativität:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ,
- (b) Distributivität:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ,
- (c)  $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Beweis
- Satz

Für  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  (beide aus  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ) gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b}.$$

- Beweis
- Anmerkung: Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aus dem  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ , die senkrecht aufeinander stehen, heißen **orthogonal**.
- Beispiel: kartesische Einheitsvektoren.
- Satz (Berechnung des Skalarprodukts aus den Vektorkoordinaten)

- (a) Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

(b) Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Beweis

- Satz (Winkel zwischen zwei Vektoren)

Es sei  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  (beide aus  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ). Dann ist

$$\arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

- Beispiel