Aufgabe 1

Berechnen Sie durch Substitution die Integrale

(a) $\int 2xe^{x^2}\,dx$, (b) $\int_0^{10} x\sin(x^2)\,dx$, (c) $\int_{-1}^{1} t\,e^{-t^2}\,dt$,

(d) $\int_{-4}^{1} 5z^2\sqrt{1-z^3}\,dz$, (e) $\int \sin(\omega t+\varphi)\,dt$, (f) $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$.

Lösung:

(a) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $z = x^2$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{1}{2x}\,dz.$$

Damit ergibt sich

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int 2xe^z\frac{1}{2x}\,dz = \int e^z\,dz = e^z + C = e^{x^2} + C.$$

(b) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $z = x^2$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{1}{2x}\,dz.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{10} x\sin(x^2)\,dx &= \int_{x=0}^{10} x\sin(z)\frac{1}{2x}\,dz \\ &= \left[\frac{1}{2}(-\cos(z))\right]_{x=0}^{10} = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_{x=0}^{10} \\ &= -\frac{1}{2}\cos(100) + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(100).\end{aligned}$$

Die Grenzen des Integrals wurden nicht substituiert, statt dessen wurde nach der Integration eine Rücksubstitution durchgeführt.

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(c) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $z = -t^2$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dt} = -2t, \qquad dt = -\frac{1}{2t}\,dz.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} t\,e^{-t^2}\,dt &= \int_{t=-1}^{1} t\,e^{z}\left(-\frac{1}{2t}\right)dz = -\frac{1}{2}\int_{t=-1}^{1} e^{z}\,dz \\ &= \left[-\frac{1}{2}\,e^{z}\right]_{t=-1}^{1} = \left[-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right]_{t=-1}^{1} = -\frac{1}{2}\,e^{-1} + \frac{1}{2}\,e^{-1} = 0.\end{aligned}$$

Die Grenzen des Integrals wurden nicht substituiert, statt dessen wurde nach der Integration eine Rücksubstitution durchgeführt.

Bei diesem Integral kann man das Resultat auch unmittelbar und völlig ohne Rechnung bekommen, wenn man erkennt, daß der Integrand eine ungerade Funktion ist und das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. (Machen Sie sich klar, was das anschaulich für die Fläche zwischen Funktionskurve und waagrechter Achse bedeutet!)

(d) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $u = 1 - z^3$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{du}{dz} = -3z^2, \qquad dz = -\frac{1}{3z^2}\,du.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{1} 5z^2\sqrt{1-z^3}\,dz &= \int_{z=-4}^{1} 5z^2\sqrt{u}\left(-\frac{1}{3z^2}\right)du = -\frac{5}{3}\int_{65}^{0} u^{1/2}\,du \\ &= \left[-\frac{5}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{65}^{0} = \left[-\frac{10}{9}\sqrt{u^3}\right]_{65}^{0} = \frac{10}{9}\sqrt{65^3} \\ &= \frac{650}{9}\sqrt{65}\,.\end{aligned}$$

Man beachte, daß auch die Integrationsgrenzen substituiert wurden. Dadurch war keine Rücksubstitution aus der u- in die z-Darstellung nötig.

(e) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $z = \omega t + \varphi$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dt} = \omega, \qquad dt = \frac{1}{\omega}\,dz.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \sin(\omega t + \varphi)\,dt &= \int \sin(z)\,\frac{1}{\omega}\,dz = \frac{1}{\omega}(-\cos(z)) + C \\ &= -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C.\end{aligned}$$

(f) Wir verwenden die Substitutionsgleichung $z = \sin(x)$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dx} = \cos(x), \qquad dx = \frac{1}{\cos(x)}\, dz.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \sin(x)\cos(x)\, dx &= \int z\cos(x)\,\frac{1}{\cos(x)}\, dz = \frac{z^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\,\sin^2(x) + C. \end{aligned}$$

Man kann auch mit der Substitution $z = \cos(x)$ arbeiten; dann erhält man

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx = -\frac{1}{2}\,\cos^2(x) + K.$$

Die beiden Ergebnisse können mit Hilfe der Gleichung

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

ineinander umgeformt werden.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{10z^3}{\sqrt{1+z^4}}\, dz,$

(b) $\displaystyle\int_{-5}^5 |x^2 - 2|\, dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx,$

(d) $\displaystyle\int x\left(\sin(x) + e^{-x^2}\right) dx.$

Lösung:

(a) Das Integral wird durch Substitution berechnet. Wir verwenden die Substitutionsgleichung $u = 1+z^4$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{du}{dz} = 4z^3, \qquad dz = \frac{1}{4z^3}\, du.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{10z^3}{\sqrt{1+z^4}}\, dz &= \int_{z=0}^3 \frac{10z^3}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{4z^3}\, du = \frac{10}{4}\int_1^{82} u^{-1/2}\, du \\ &= \left[\frac{5}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_1^{82} = \left[5\sqrt{u}\right]_1^{82} = 5\sqrt{82} - 5. \end{aligned}$$

(b) Der Betrag führt zu einer Fallunterscheidung

$$|x^2-2| = \begin{cases} 2-x^2 & \text{für } -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x^2-2 & \text{sonst} \end{cases},$$

die wiederum zu einer Aufspaltung des Integrals führt. Vor der Aufspaltung kann man noch ausnutzen, daß der Integrand eine gerade Funktion und der Integrationsbereich symmetrisch zum Nullpunkt ist; statt von -5 bis 5 zu integrieren, nimmt man das Doppelte des Integrals von 0 bis 5.

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^{5} |x^2-2|\,dx &= 2\int_0^5 |x^2-2|\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,dx + 2\int_{\sqrt{2}}^{5} (x^2-2)\,dx \\
&= \left[2(2x-\frac{x^3}{3})\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[2(\frac{x^3}{3}-2x)\right]_{\sqrt{2}}^{5} \\
&= 2\left(2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) + 2\left(\frac{125}{3}-10\right) - 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{16}{3}\sqrt{2} + \frac{190}{3}\,.
\end{aligned}$$

(c) Das Integral wird durch Substitution berechnet. Wir verwenden die Substitutionsgleichung $u = \ln(x)$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad dx = x\,du.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{u}}{x}\,x\,du = \int u^{1/2}\,du \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C = \frac{2}{3}\,u\sqrt{u} + C \\
&= \frac{2}{3}\,\ln(x)\sqrt{\ln(x)} + C.
\end{aligned}$$

(d) Zunächst wird das Integral zerlegt:

$$\int x\left(\sin(x) + e^{-x^2}\right)\,dx = \int x\sin(x)\,dx + \int xe^{-x^2}\,dx.$$

Das erste Teilintegral wird durch partielle Integration berechnet, das zweite durch Substitution.

Mit $u = x$, $u' = 1$ und $v' = \sin(x)$, $v = -\cos(x)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x)\,dx &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\
&= -x\cos(x) + \sin(x) + C_1.
\end{aligned}$$

Beim zweiten Integral verwenden wir die Substitutionsgleichung $z = -x^2$. Ableiten der Gleichung und formales Umformen liefert:

$$\frac{dz}{dx} = -2x, \qquad dx = -\frac{1}{2x}\,dz.$$

Damit ergibt sich

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int xe^{z}\left(-\frac{1}{2x}\right)\,dz = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + C_2.$$

Wir fassen die Teilintegrale zusammen, addieren die Konstanten C_1 und C_2 zur Konstanten C und erhalten damit

$$\int x\left(\sin(x) + e^{-x^2}\right)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

als Endergebnis.