Aufgabe 1

Geben Sie den Integranden $f = f(x)$ an, falls gilt

(a) $\displaystyle\int f(x)\,dx = 2x^5 + C,$

(b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \sin(3x) - 4\cos(x) + C.$

Lösung:

(a) $f(x) = 10x^4$, d. h. es gilt $\displaystyle\int 10x^4\,dx = 2x^5 + C.$

(b) $f(x) = 3\cos(3x) + 4\sin(x)$, d. h. es gilt $\displaystyle\int 3\cos(3x) + 4\sin(x)\,dx =$ $\sin(3x) - 4\cos(x) + C.$

Aufgabe 2

Suchen Sie Stammfunktionen zu den Funktionen

(a) $f(x) = 5x^2 - 7x,$ (b) $g(x) = 4\cos(x),$ (c) $h(x) = 1/\sqrt{x}\,.$

Was ergibt sich dann für die unbestimmten Integrale

(d) $\displaystyle\int (5x^2 - 7x)\,dx,$ (e) $\displaystyle\int 4\cos(x)\,dx,$ (f) $\displaystyle\int 1/\sqrt{x}\,dx,$

und die bestimmten Integrale

(g) $\displaystyle\int_1^3 (5x^2 - 7x)\,dx,$ (h) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos(x)\,dx,$ (i) $\displaystyle\int_1^{100} 1/\sqrt{x}\,dx$?

Lösung: Wir bezeichnen die Stammfunktionen mit den entsprechenden Großbuchstaben und erhalten

(a) $F(x) = \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{7}{2}\,x^2 + C,$

(b) $G(x) = 4\sin(x) + C,$

(c) $H(x) = 2\sqrt{x} + C\,.$

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Für die unbestimmten Integrale folgt damit unmittelbar

(d) $\int (5x^2 - 7x)\,dx = F(x) = \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{7}{2}\,x^2 + C,$

(e) $\int 4\cos(x)\,dx = G(x) = 4\sin(x) + C,$

(f) $\int 1/\sqrt{x}\,dx = H(x) = 2\sqrt{x} + C.$

Für die bestimmten Integrale ergibt sich

(g) $\int_1^3 (5x^2 - 7x)\,dx = \left[\frac{5}{3}\,x^3 - \frac{7}{2}\,x^2\right]_1^3 = 45 - \frac{63}{2} - \frac{5}{3} + \frac{7}{2} = \frac{46}{3}\,,$

(h) $\int_0^\pi 4\cos(x)\,dx = [4\sin(x)]_0^\pi = 4\sin(\pi) - 4\sin(0) = 0,$

(i) $\int_1^{100} 1/\sqrt{x}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{100} = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 1 = 18.$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\int (e^x + 3x^2)\,dx,$ (b) $\int_1^5 \frac{17}{x}\,dx,$ (c) $\int (gt + v_0)\,dt,$

(d) $\int xyz\,dy,$ (e) $\int \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\,dx,$ (f) $\int_0^5 |2 - x|\,dx,$

(g) $\int \sqrt{t}\,dt,$ (h) $\int t^2\sqrt{t}\,dt,$ (i) $\int x(\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^4})\,dx.$

Lösung:

(a) $\int (e^x + 3x^2)\,dx = e^x + x^3 + C,$

(b) $\int_1^5 \frac{17}{x}\,dx = [17\ln(x)]_1^5 = 17\ln(5),$

(c) $\int (gt + v_0)\,dt = \frac{1}{2}\,gt^2 + v_0 t + s_0,$

(d) $\int xyz\,dy = \frac{1}{2}\,xy^2 z + C,$

(e) $\int \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i+1}}{i+1} + C,$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_0^5 |2-x|\,dx &= \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx \\
&= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^5 \\
&= 4 - 2 + \frac{25}{2} - 10 - 2 + 4 \\
&= \frac{13}{2},
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{t}\,dt &= \int t^{1/2}\,dt \\
&= \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C,
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
\int t^2\sqrt{t}\,dt &= \int t^2 t^{1/2}\,dt = \int t^{5/2}\,dt \\
&= \frac{t^{5/2+1}}{5/2+1} + C = \frac{t^{7/2}}{7/2} + C \\
&= \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + C,
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\int x(\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^4})\,dx &= \int x\sqrt{x}\,dx - 5\int x\sqrt[3]{x^4}\,dx \\
&= \int x x^{1/2}\,dx - 5\int x x^{4/3}\,dx \\
&= \int x^{3/2}\,dx - 5\int x^{7/3}\,dx \\
&= \frac{x^{5/2}}{5/2} - 5\frac{x^{10/3}}{10/3} + C \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{10}} + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit partieller Integration die Integrale

(a) $\int x\sin(x)\,dx$, (b) $\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx$, (c) $\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx$,

(d) $\int x\ln(x)\,dx$, (e) $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$, (f) $\int e^t\sin(t)\,dt$.

Lösung: Es gilt

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

(a) Mit $u = x$, $u' = 1$ und $v' = \sin(x)$, $v = -\cos(x)$ folgt

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)\,dx &= -x\cos(x) - \int 1\cdot(-\cos(x))\,dx\\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx\\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C.\end{aligned}$$

(b) Mit $u = x$, $u' = 1$ und $v' = e^x$, $v = e^x$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx &= [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x, dx\\ &= [xe^x]_{-1}^{1} - [e^x]_{-1}^{1}\\ &= e - (-1)e^{-1} - e + e^{-1}\\ &= 2e^{-1}\\ &= 2/e.\end{aligned}$$

(c) Mit $u = x^2$, $u' = 2x$ und $v' = \sin(x)$, $v = -\cos(x)$ folgt

$$\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos(x), dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite muß mit einer erneuten partiellen Integration berechnet werden.

Nebenrechnung: Mit $u = x$, $u' = 1$ und $v' = \cos(x)$, $v = \sin(x)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx &= [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x), dx\\ &= [x\sin(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_0^{\pi}\\ &= [x\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx &= \left[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\right]_0^{\pi}\\ &= \pi^2 - 2 - 2\\ &= \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

(d) Mit $u = \ln x$, $u' = 1/x$ und $v' = x$, $v = x^2/2$ folgt

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C \\ &= \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

(e) Durch partielle Integration mit $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$ und $v' = \cos(x)$, $v = \sin(x)$ folgt zunächst die Gleichung

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) - \int \cos(x)\sin(x)\,dx.$$

Addieren wir auf beiden Seiten das Integral $\int \cos(x)\sin(x)\,dx$, folgt

$$2\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x),$$

woraus wir nach Division durch 2 das Ergebnis erhalten, das wir noch mit einer Integrationskonstanten schreiben, da das Integral unbestimmt ist:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C.$$

Bei umgekehrter Wahl von u und v', d.h. bei $u = \cos(x)$ und $v' = \sin(x)$ folgt mit analoger Rechnung

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + K.$$

Das stimmt mit dem vorherigen Ergebnis überein, da wegen

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

die Umformung

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\cos^2(x) + K &= -\frac{1}{2}\left(1 - \sin^2(x)\right) + K = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2(x) + K \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(x) + C\end{aligned}$$

möglich ist, wobei $C = K - 1/2$ gilt.

(f) Durch partielle Integration mit $u = \sin(t)$, $u' = \cos(t)$ und $v' = e^t$, $v = e^t$ erhalten wir

$$\int e^t\sin(t)\,dt = e^t\sin(t) - \int e^t\cos(t)\,dt.$$

Durch erneute partielle Integration, diesmal mit $u = \cos(t)$, $u' = -\sin(t)$ und $v' = e^t$, $v = e^t$ bekommen wir daraus die Gleichung

$$\int e^t \sin(t)\, dt = e^t \sin(t) - \left(e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t)\, dt \right).$$

Wird das Integral $\int e^t \sin(t)\, dt$ auf beiden Seiten addiert, ergibt sich

$$2 \int e^t \sin(t)\, dt = e^t \sin(t) - e^t \cos(t).$$

Wird durch 2 dividiert und die Integrationskonstante dazu geschrieben, so haben wir

$$\int e^t \sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\, e^t (\sin(t) - \cos(t)) + C$$

als Endergebnis.