Aufgabe 1

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen

(a) $y = \sin(3x)$,

(b) $y = \sqrt{5 + x^2}$,

(c) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$,

(d) $f(t) = \ln(e^{-5t} + e^{3t})$.

Lösung:

(a) $y' = 3\cos(3x)$

(b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{5+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{5+x^2}}$

(c) $f'(t) = \omega\cos(\omega t + \varphi)$

(d) $f'(t) = \dfrac{-5e^{-5t} + 3e^{3t}}{e^{-5t} + e^{3t}}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

(a) $y = \sin(x)\sqrt{1 + x^2}$,

(b) $y = 2^x(5x^2 - 3x - 8)$,

(c) $f(t) = e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi)$,

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\, e^{-x^2}$.

Lösung:

(a) $y' = \cos(x)\sqrt{1+x^2} + \sin(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $y' = \ln(2)2^x(5x^2 - 3x - 8) + 2^x(10x - 3)$

(c)

$$\begin{aligned} f'(t) &= -ke^{-kt}\sin(\omega t + \varphi) + e^{-kt}\omega\cos(\omega t + \varphi) \\ &= e^{-kt}(\omega\cos(\omega t + \varphi) - k\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(d)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2xe^{-x^2}(x^2+1) - e^{-x^2}2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2xe^{-x^2}(x^2+1+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-2xe^{-x^2}(x^2+2)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die zweiten Ableitungen der Funktionen

(a) $y = \sqrt{x}$,

(b) $y = \sin(x^2)$,

(c) $s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$,

(d) $f(x) = e^{-x^2}$.

Lösung:

(a) $y' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = -\frac{1}{4}\, x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

(b) $y' = 2x\cos(x^2)$

$y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

(c) $\dot{s}(t) = v_0 + gt$

$\ddot{s}(t) = g$

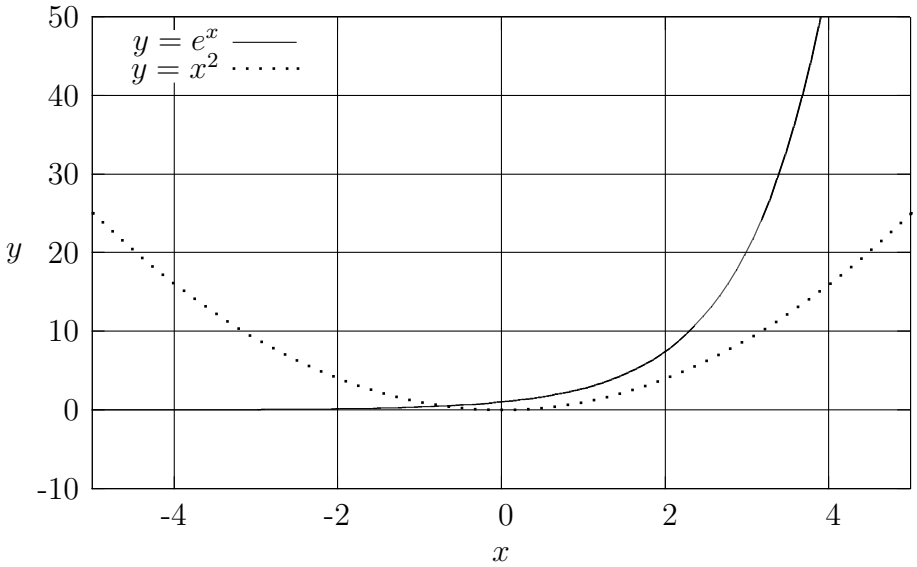
(d) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

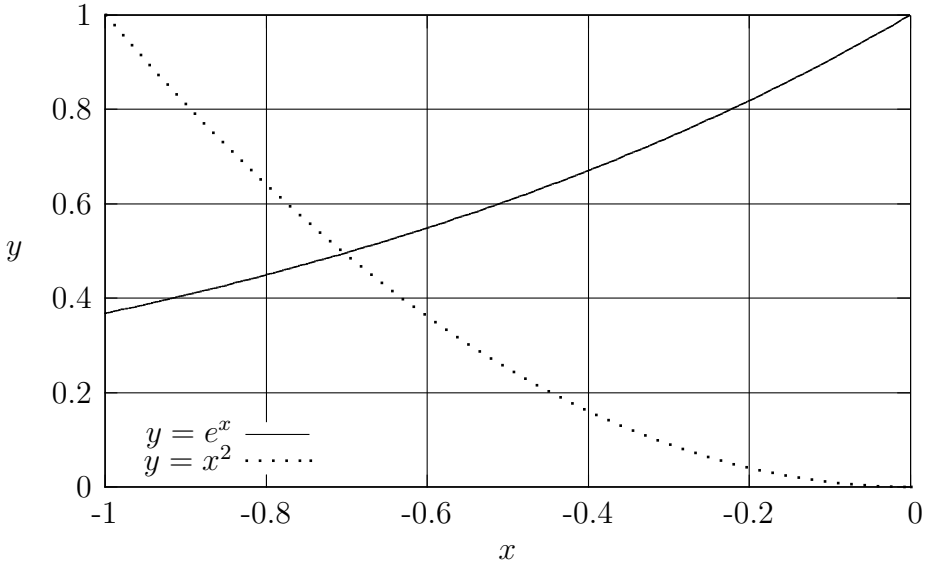
Aufgabe 4

Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren die x-Koordinate des Schnittpunkts von $y = e^x$ und $y = x^2$.

Lösung: Die Graphen der Funktionen $y = e^x$ und $y = x^2$ schneiden sich in genau einem Punkt.



Mit einer einfachen Abschätzung oder durch eine Zeichnung sieht man, daß der Schnittpunkt zwischen $x = -1$ und $x = 0$ liegt. Schauen wir uns das näher an.



Aufgrund der Zeichnung bietet sich $x_0 = -0,7$ als Startwert für das Newton-Verfahren an.

Mit dem Newton-Verfahren kann man näherungsweise Nullstellen von Funktionen berechnen. In unserem Fall suchen wir nach dem Schnittpunkt von $y = e^x$ und $y = x^2$, was gleichbedeutend mit der Suche nach der Nullstelle der Differenz $y = e^x - x^2$ ist.

Man geht bei dem Newton-Verfahren von einem Startwert x_0 aus und verbessert diesen schrittweise entsprechend der Interationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Speziell für

$$f(x) = e^x - x^2$$

wird die Iterationsvorschrift zu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n}\,.$$

Mit dem Startwert $x_0 = -0,7$ wird als erster iterierter Wert

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{e^{x_0} - x_0^2}{e^{x_0} - 2x_0} \\ &= -0,7 - \frac{e^{-0,7} - (-0,7)^2}{e^{-0,7} - 2(-0,7)} \\ &\approx -0,7034721896 \end{aligned}$$

berechnet. Ausgehend von x_1 bekommen wir

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{e^{x_1} - x_1^2}{e^{x_1} - 2x_1} \\ &= -0,7034721896 - \frac{e^{-0,7034721896} - (-0,7034721896)^2}{e^{-0,7034721896} - 2(-0,7034721896)} \\ &\approx -0,7034674225 \end{aligned}$$

als zweiten iterierten Wert.

Beim dritten Iterationswert ändert sich nur noch die letzte Stelle

$$x_3 \approx -0,7034674224$$

bei unserer Zahlenangabe mit zehn Nachkommastellen.

Bei den weiteren Iterationswerten ändert sich an den ersten zehn Nachkommastellen nichts mehr, die Iteration „kommt zum Stehen“.

Wir haben also:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -0,7034721896 \\ x_2 &\approx -0,7034674225 \\ x_3 &\approx -0,7034674224 \\ x_4 &\approx -0,7034674224 \end{aligned}$$

Die letzte Stelle wurde dabei nicht gerundet.