Aufgabe 1

Differenzieren Sie die Funktionen

(a) $y = 2x^5$, (b) $y = x^{a+1}$, (c) $y = \sqrt[5]{x^2}$, (d) $y = x^3/\sqrt{x}$.

Lösung:

(a) $y' = 10x^4$

(b) $y' = (a+1)x^a$

(c) Wir schreiben $y = \sqrt[5]{x^2} = x^{2/5}$ und erhalten

$$y' = \frac{2}{5}\,x^{2/5-1} = \frac{2}{5}\,x^{-3/5} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,.$$

(d) Durch das Umschreiben

$$y = \frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{1/2}} = x^{2,5}$$

vereinfacht sich die Aufgabe wesentlich. Es folgt

$$y' = 2,5\,x^{1,5} = 2,5\,x^{3/2} = 2,5\,\sqrt{x^3}\,.$$

Aufgabe 2

Differenzieren Sie die Funktionen

(a) $y = 5x^3 + 10\sqrt{x}$, (b) $y = x^5 + 7x^3 - 8x^2 - x$,

(c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, (d) $f(x) = 3x^2 + 2x^3$,

(e) $f(t) = et^2 + e^t$, (f) $f(t) = (xyt)^5$,

(g) $x(t) = \ln(t) + 2t^{1,5} - 10/t^3$, (h) $x(t) = at^3 + bt^2 + ct$.

Lösung:

(a) $y' = 15x^2 + 5/\sqrt{x}$

(b) $y' = 5x^4 + 21x^2 - 16x - 1$

(c) $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

(d) $f'(x) = 6x + 6x^2 = 6x(1 + x)$

(e) $f'(t) = 2et + e^t$

(f) $f'(t) = 5\,x^5\,y^5\,t^4$

(g) $\dot{x}(t) = 1/t + 3t^{0,5} + 30t^{-4} = 1/t + 3\sqrt{t} + 30/t^4$

(h) $\dot{x}(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Aufgabe 3

Differenzieren Sie mit Hilfe der Produktregel die Funktionen

(a) $y = x^2 \sin(x)$,

(b) $y = 2x \tan(x)$,

(c) $f(t) = e^t\,(\sin(t) + \cos(t))$,

(d) $f(x) = 2x\,e^x\,(1 + \ln(x))$.

Lösung:

(a) $y' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$

(b) $y' = 2\tan(x) + 2x/\cos^2(x)$

(c) $f'(t) = e^t\,(\sin(t) + \cos(t)) + e^t\,(\cos(t) - \sin(t)) = 2e^t \cos(t)$

(d) Die Funktion besteht aus den drei Faktoren $u(x) = 2x$, $v(x) = e^x$ und $w(x) = 1 + \ln(x)$, hat also die Struktur $f = u \cdot v \cdot w$. Mit der Produktregel folgt allgemein

$$\begin{aligned} f' &= (u \cdot v \cdot w)' \\ &= (u \cdot v)' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \\ &= (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot w + u \cdot v \cdot w' \\ &= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \end{aligned}$$

für die Ableitung, so daß sich mit $u' = 2$, $v' = e^x$ und $w' = 1/x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,e^x\,(1 + \ln(x)) + 2x\,e^x\,(1 + \ln(x)) + 2x\,e^x\,\frac{1}{x} \\ &= 2\,e^x\,(1 + \ln(x) + x + x\ln(x) + 1) \\ &= 2\,e^x\,(2 + x + \ln(x) + x\ln(x)) \end{aligned}$$

ergibt.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe der Quotientenregel die Ableitungen der Funktionen

(a) $y = \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$,

(b) $y = \dfrac{x^2}{2+x^2}$,

(c) $u(t) = \dfrac{5+\cos(t)}{5-\sin(t)}$,

(d) $u(z) = \dfrac{z^2}{1+\sqrt{z}}$.

Lösung:

(a) $y' = \dfrac{\cos(x)(1+x^2) - \sin(x)2x}{(1+x^2)^2}$

(b) $y' = \dfrac{2x(2+x^2) - x^2 2x}{(2+x^2)^2} = \dfrac{4x}{(2+x^2)^2}$

(c)

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \frac{-\sin(t)(5-\sin(t)) - (5+\cos(t))(-\cos(t))}{(5-\sin(t))^2} \\
&= \frac{-5\sin(t) + \sin^2(t) + 5\cos(t) + \cos^2(t)}{(5-\sin(t))^2} \\
&= \frac{5(\cos(t) - \sin(t)) + 1}{(5-\sin(t))^2}
\end{aligned}$$

(d) $u'(z) = \dfrac{2z(1+\sqrt{z}) - z^2 \frac{1}{2\sqrt{z}}}{(1+\sqrt{z})^2} = \dfrac{2z + 2z^{1,5} - \frac{1}{2}\, z^{1,5}}{(1+\sqrt{z})^2} = \dfrac{2z + 1,5z^{1,5}}{(1+\sqrt{z})^2}$