Aufgabe 1

Lösen Sie die Gleichung

$$10 - 10^{x/3} = 5.$$

Lösung: Die Unbekannte, deren Wert gesucht ist, steht im Exponenten von $10^{x/3}$. Will man an den Exponenten von $10^{x/3}$ herankommen, muß man logarithmieren. Vorher muß $10^{x/3}$ auf einer Seite der Gleichung isoliert werden. Also formen wir im ersten Schritt die Gleichung zu

$$5 = 10^{x/3}$$

um. Wird auf beiden Seiten der Logarithmus zur Basis 10 gebildet, ergibt sich

$$\log_{10} 5 = \log_{10} 10^{x/3} = \frac{x}{3} \cdot \log_{10} 10 = \frac{x}{3}\,,$$

wobei zunächst ein Logarithmengesetz verwendet wurde und danach die Beziehung $\log_{10} 10 = 1$. Daraus folgt sofort

$$x = 3 \cdot \log_{10} 5 \approx 3 \cdot 0,69897 \approx 2,097$$

als Lösung der Gleichung.

Aufgabe 2

Lösen Sie die Gleichung

$$2,5 \cdot \ln(x) = \ln(7x) - \ln\sqrt{x}\,.$$

Lösung: Zunächst wenden wir Logarithmengesetze an, und formen die Gleichung auf

$$2,5 \cdot \ln(x) = \ln(7) + \ln(x) - \frac{1}{2}\,\ln(x)$$

um, wobei $\sqrt{x} = x^{1/2}$ zu beachten ist. Durch Zusammenfassen der $\ln(x)$-Terme erhalten wir zunächst

$$2,5 \cdot \ln(x) = \ln(7) + \frac{1}{2}\,\ln(x)$$

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

und daraus

$$2 \cdot \ln(x) = \ln(7).$$

Daraus ergibt sich

$$\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(7) = \ln\sqrt{7},$$

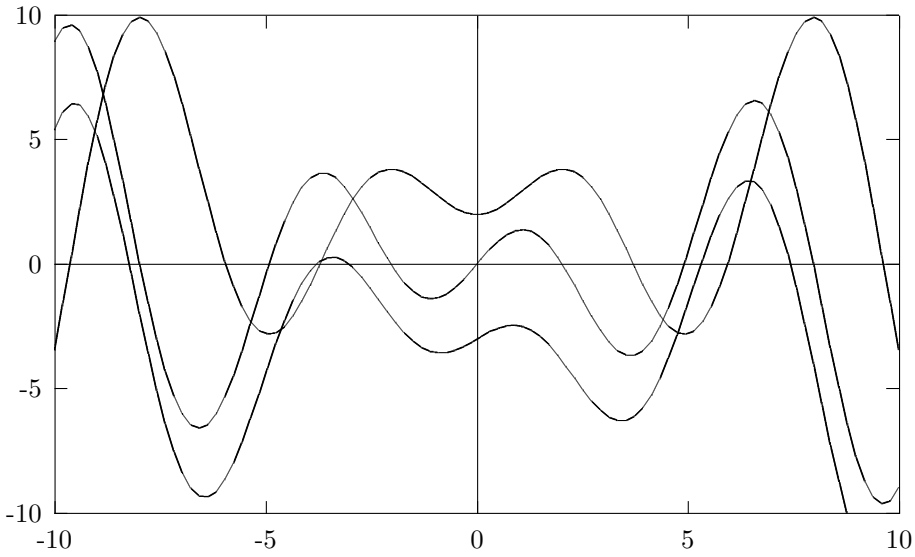
wobei wieder ein Logarithmengesetz verwendet wurde. Also ist

$$x = \sqrt{7}$$

die Lösung der Gleichung. (Der letzte Schritt folgt unmittelbar aus der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion; man kann aber auch einfach die e-Funktion auf beide Seiten anwenden.)

Aufgabe 3

Die drei Kurven in der folgenden Abbildung stellen eine Funktion f, ihre Ableitung f' und eine Funktion g, die nichts mit f oder f' zu tun hat, dar. Markieren Sie welches f, welches f', und welches g ist.



Lösung: Hat die Kurve der Funktion f eine waagrechte Tangente, muß $f' = 0$ sein, die Kurve von f' also durch die x-Achse gehen.

Betrachten wir zum Beispiel den Bereich neben der y-Achse, ungefähr bei $x = 1$. Zwei Kurven habe dort einen Extremwert, aber keine der drei Kurven hat eine Nullstelle. In diesem Bereich ist also speziell auch $f' \neq 0$. Also kann f dort keine waagrechte Tangente haben. Somit ist f nicht eine der beiden Funktionen, die dort Extremwerte haben. Damit muß die dritte Kurve die Darstellung von f sein.

Nachdem wir wissen, welches die Kurve der Funktion f ist, bestimmen wir die Kurve von f'. Die Kurve von f hat bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente. Also muß f' eine Nullstelle haben. Das ist nur bei einer der beiden verbleibenden Kurven der Fall. Damit ist f' gefunden.

Es können auch noch weitere Eigenschaften betrachtet werden: wenn zum Beispiel die Kurve von f fällt, hat f' negative Funktionswerte u.s.w.

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe eines Differenzenquotienten und eines Grenzübergangs, daß die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ gleich $f'(x) = 3x^2$ ist.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$